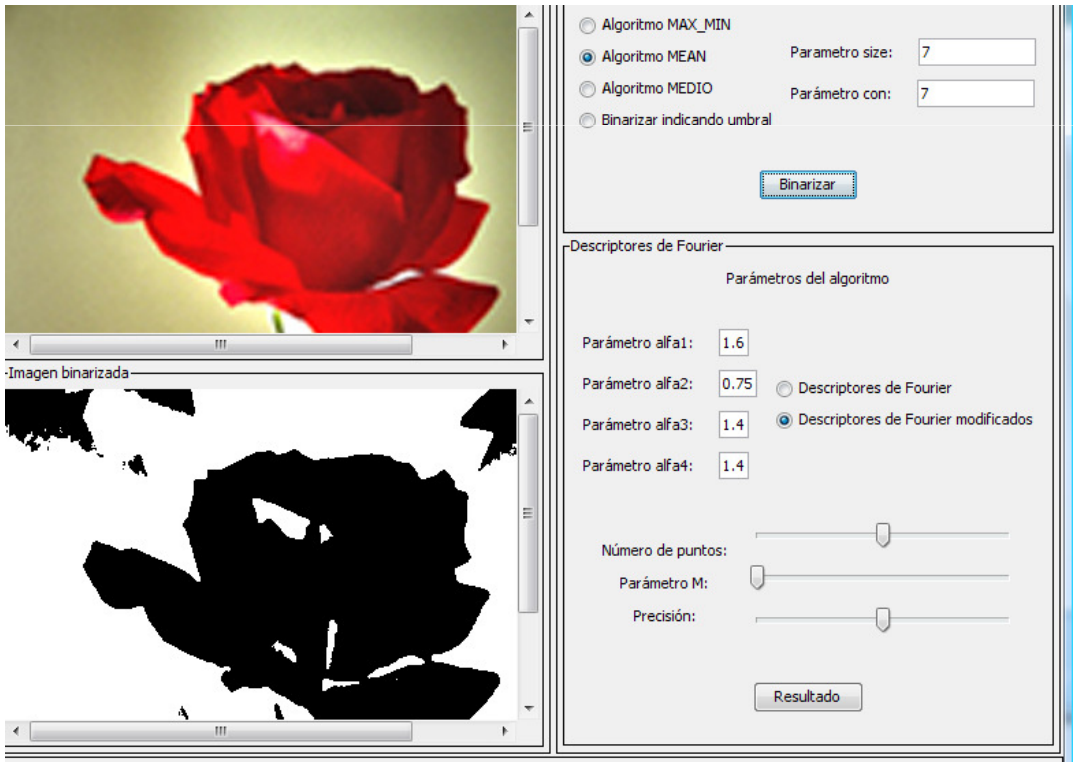
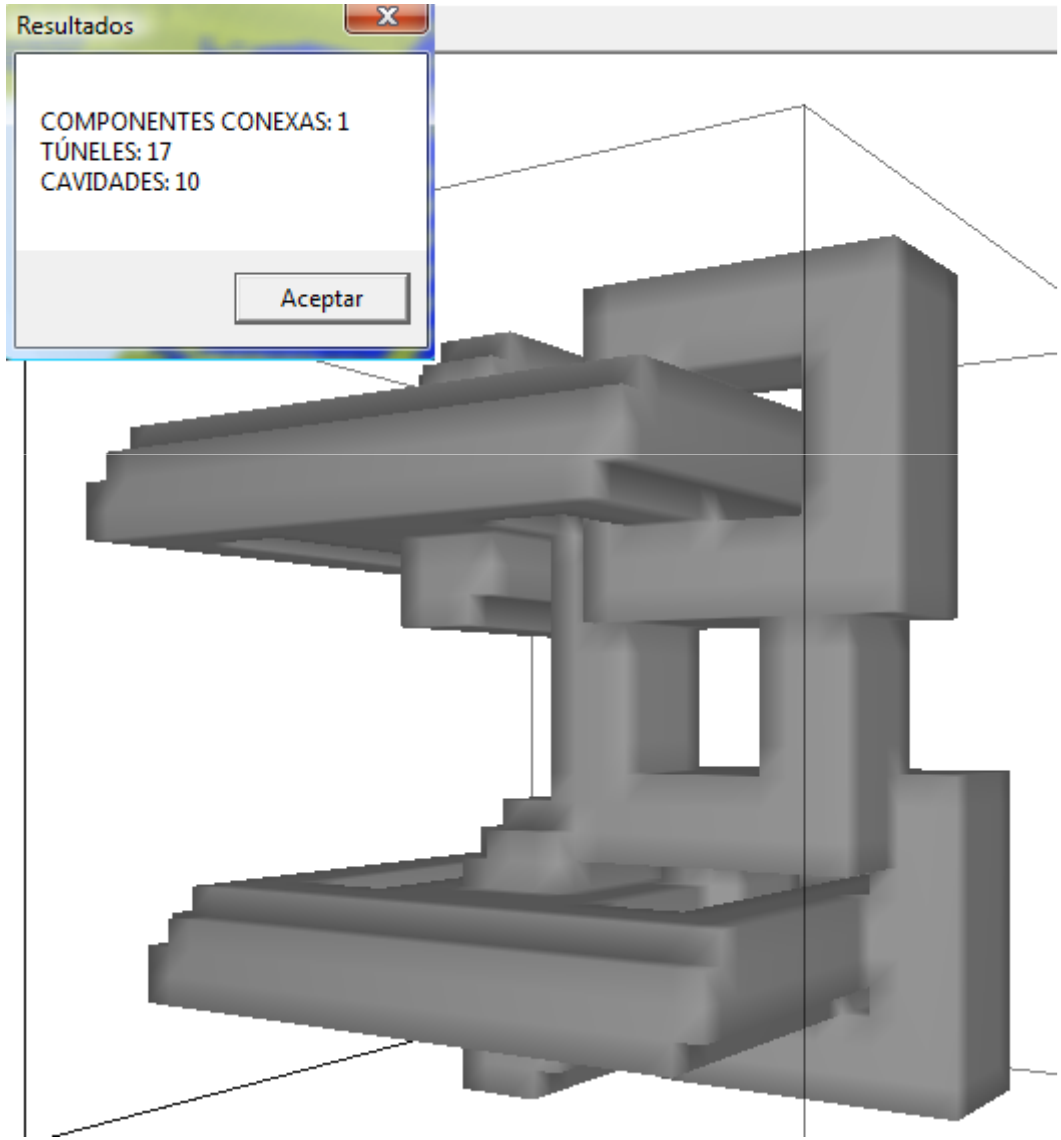
Tema 6: Descriptores topológicos, geométricos y estadísticos de las imágenes digitales



Descriptores topológicos de imágenes
(después de realizar una segmentación)

- Componentes conexas
- Agujeros (2D)
- Túneles y cavidades (3D)
- Característica de Euler
- Esqueleto

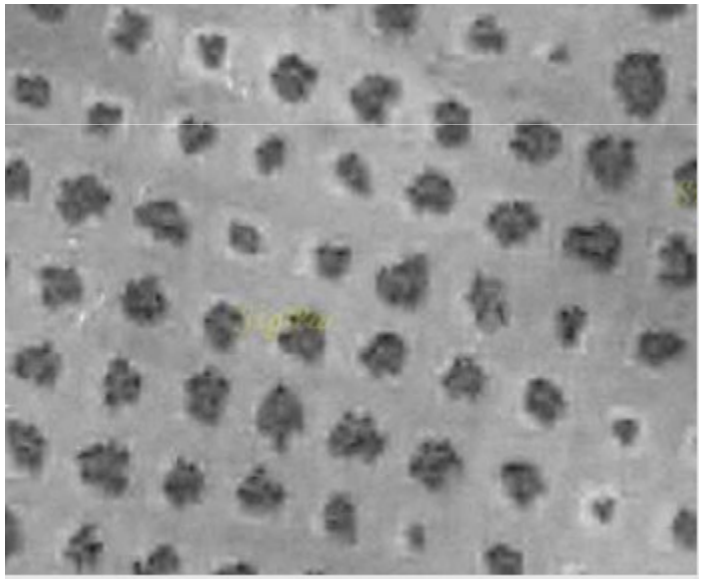


Descriptores topológicos

Componentes conexas

Recordemos que una componente conexa es un conjunto de píxeles, C, tal que para cualquier par de píxeles del conjunto, existe un camino digital que los une contenido en C.

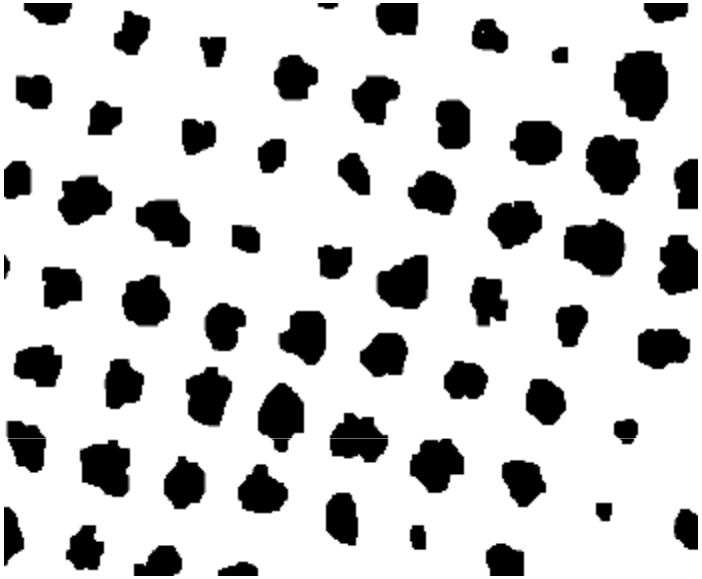
Por ejemplo, a partir de una fotografía aérea de campos de olivos se quiere contar el número de olivos que aparecen en la imagen.
La solución puede consistir en realizar una binarización apropiada de la imagen y, tras eliminar el ruido existente, contar el número de componentes conexas.



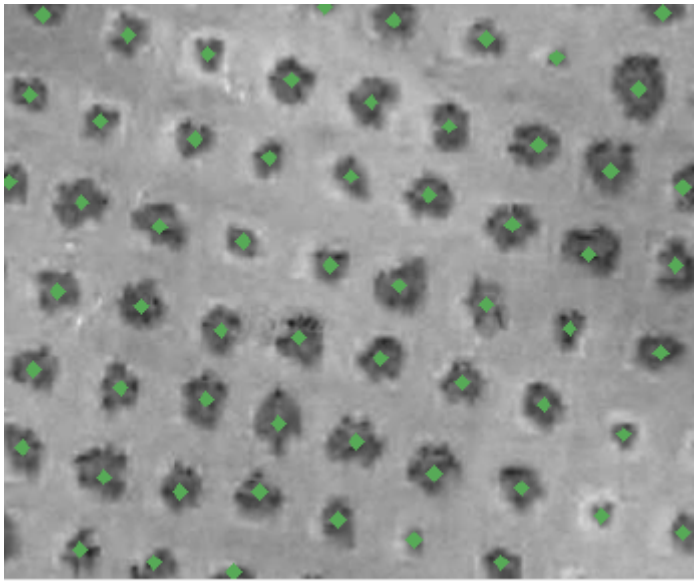
Descriptores topológicos

Componentes conexas

Resultado tras la binarización y eliminación de ruido.



Identificación de las componentes conexas en la imagen original.



Descriptores topológicos

Algoritmos para el cálculo de componentes conexas

Primer algoritmo: Etiquetado de componentes conexas (comentado en el tema 1-1 para la 4-adyacencia en negro).
Usando la **8-adyacencia** en negro.

1. Durante el primer rastreo, para cada punto **P(x,y)** que tenga valor 1, examinamos a los vecinos superiores A(x-1,y-1), B(x-1,y), C(x-1,y+1) y D(x,y-1),
   - Si todos son 0's, damos a *P* una nueva etiqueta;
   - si tan sólo uno es 1, le damos a *P* la etiqueta del otro;
   - Y si hay más de uno que es 1, le damos a *P* la etiqueta de uno de ellos, y si sus etiquetas son diferentes, registramos el hecho de que son equivalentes, i.e., pertenecen a la misma componente.

2. Ordenamos las parejas equivalentes en clases de equivalencia, y escogemos una etiqueta para representar cada clase.

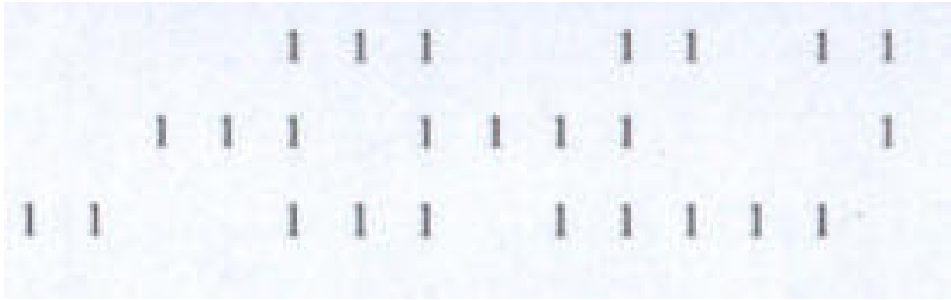
3. Realizamos un segundo rastreo de la imagen y sustituimos cada etiqueta por el representante de cada clase; cada componente ha sido ahora etiquetada de forma única.

Descriptores topológicos

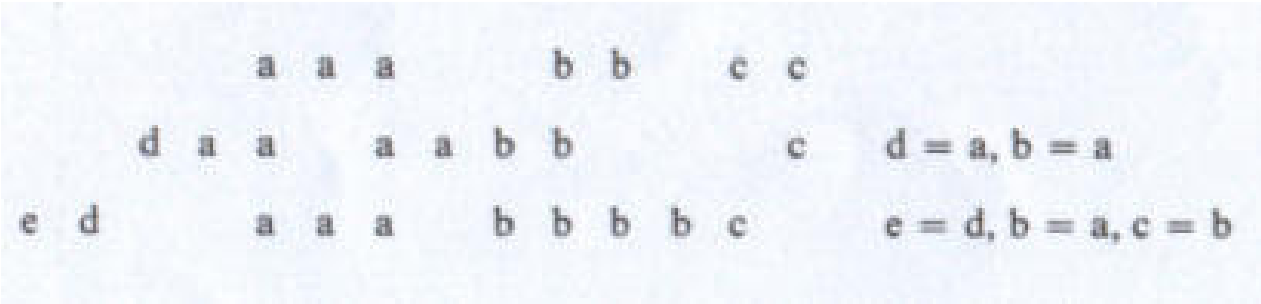
Componentes conexas

Primer algoritmo (8-adyacencia en negro)

Consideremos la siguiente imagen:



El resultado del primer rastreo, usando 8-adyacencia es :



Descriptores topológicos

Componentes conexas

Segundo algoritmo: para etiquetar componentes en paralelo.

- Supongamos que primero le damos a cada píxel negro una única etiqueta (por ejemplo, las coordenadas del píxel en la imagen).

- Realizamos repetidamente una operación de máximo local en paralelo, donde el máximo está definido por el orden lexicográfico de los pares de coordenadas;

    - Los puntos etiquetados 0 permanecen 0 (píxeles blancos).
    - Usamos el máximo 4-vecino si queremos etiquetar 4-componentes, y 8-vecinos para 8-componentes.
    - Cuando se itera hasta que no haya más cambios, cada punto de una componente dada está etiquetado con las coordenadas de los puntos más inferiores-derecha.

Descriptores topológicos

Componentes conexas

P	X
Y	Z

Tercer algoritmo: eliminando píxeles

Definamos una función f: I -> I,(recorremos los píxeles P de la imagen de norte a sur y de oeste a este hasta que no haya cambios) tal que:

- Si P es blanco (0) entonces f(P)=1 si y sólo si X=Y=1.
- Si P es negro (1) entonces f(P)=0 si y sólo si X=Y=Z=0 (excepto si P está totalmente aislado, es decir, rodeado de píxeles blancos).
- En cualquier otro caso, f(P)=P.

Cualquier componente conexa en negro de la imagen se colapsa al punto cuya coordenada x coincide con la coordenada x del píxel más a la izquierda y cuya coordenada y coincide con la coordenada y del píxel más al norte. Contando los píxeles aislados que quedan al final obtendremos el número de componentes conexas en blanco.

Observemos que con este proceso se ha perdido toda la geometría y topología (agujeros) de la imagen.

Descriptores topológicos

AGUJEROS:

El número de agujeros de una imagen 2D coincide con el número de componentes conexas del fondo de la imagen menos uno.
Suponemos que nuestra imagen está enmarcada por un cuadrado de píxeles blancos.

Ejercicio: Establecer un algoritmo para el cálculo del número de agujeros de una imagen binaria 2D.

NÚMERO (O CARACTERÍSTICA) DE EULER:

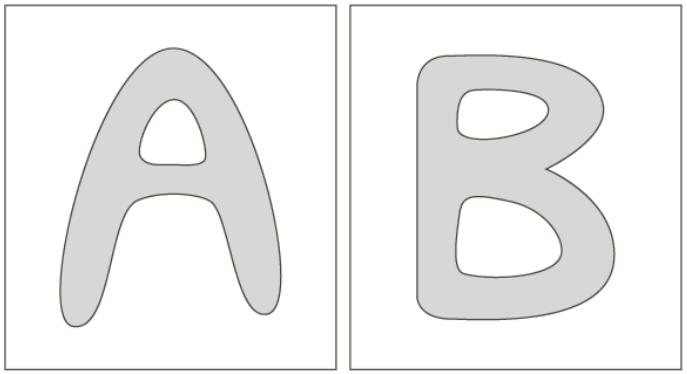
El número de Euler de una imagen binaria 2D se define como el número de componentes conexas (negras) menos el número de agujeros.

Ejercicio: Establecer una algoritmo para calcular el número de Euler de una imagen.

Descriptores topológicos

NÚMERO DE EULER (2D):

E=C-A



a b

FIGURE 11.25 Regions with Euler numbers equal to 0 and −1, respectively.

Si la región está representada por segmentos unidos por vértices,

E=Vertices-Edges+Faces

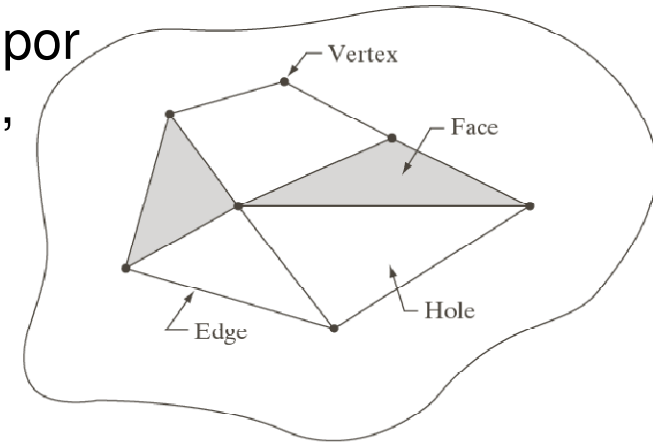
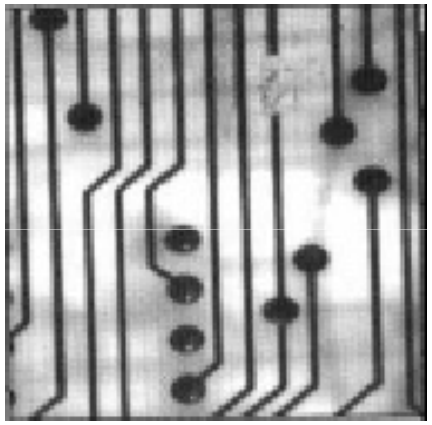
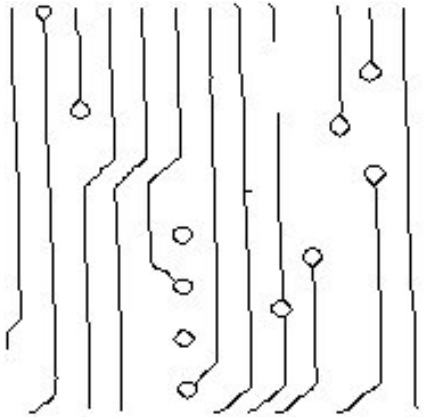


FIGURE 11.26 A region containing a polygonal network.

Descriptores topológicos

Esqueleto

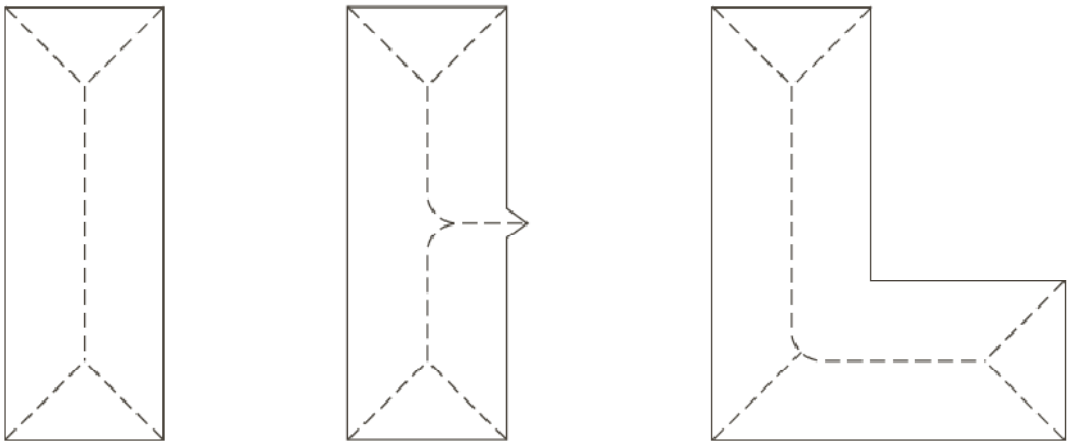




Descriptores topológicos

Esqueleto

- ¿Qué es un *esqueleto*?
  Representa la estructura de un objeto (conservando la conectividad, los agujeros y, en cierto modo, la extensión del mismo) con un número pequeño de píxeles.



- Idea intuitiva: supongamos que el objeto en cuestión está hecho de un material imflamable y se prende fuego simultáneamente a lo largo de todo el borde. El esqueleto viene determinado por los puntos en los que se encuentran distintos frentes del fuego.

Descriptores topológicos

Esqueleto

Decimos que *S* es el esqueleto de un objeto *F* (conjunto de píxeles negros) si:

- *S* está en posición central en *F*. En particular, S está totalmente contenido en *F*.
- *S* es de un píxel de ancho.
- *S* "conserva" las propiedades geométricas de *F*.
- *S* tiene el mismo número de componentes conexas que *F.*
- *S* tiene el mismo número de agujeros que *F.*
- A partir de *S* podemos reconstruir *F.*

Las tres últimas condiciones son equivalentes a decir que S y F son homotópicos. Es decir, existe una deformación "continua" de F a S.

Descriptores topológicos

Esqueleto

Aplicaciones:

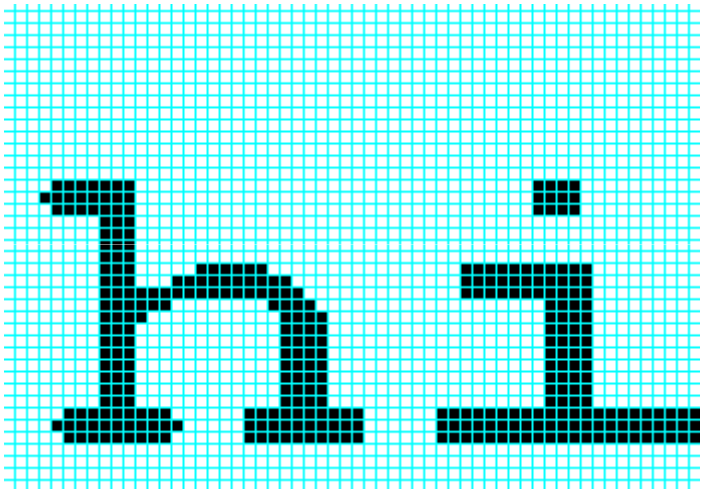
- Proporciona información sobre la **topología de un objeto.**
- Proporciona información sobre la **estructura de un objeto.**

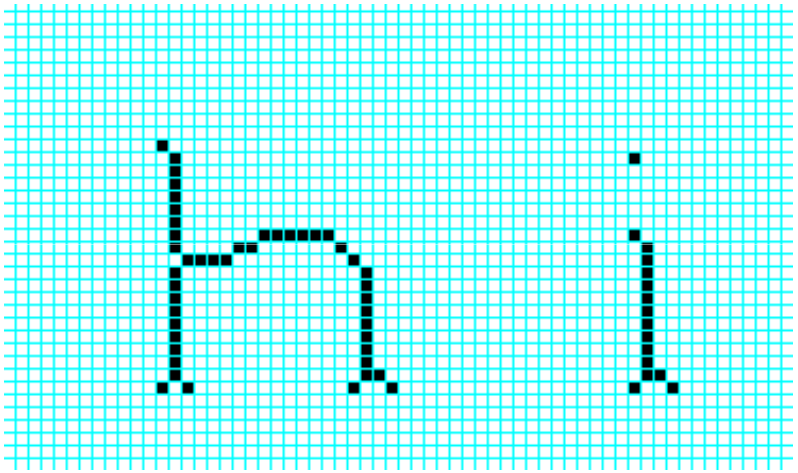
• Detección de fallos en procesos de fabricación (ej: placas de circuitos).
• Obtención de datos biométricos (ej: huellas dactilares, reconocimiento facial)
• Reconocimiento de formas (ej: reconocimiento de caracteres u OCR).
• Visión artificial.
• Diseño gráfico (ej: Corel PhotoPaint).
• Aplicaciones médicas o científicas (ej: GPS, topografía).

Descriptores topológicos

Esqueleto

Primer algoritmo: adelgazamiento mediante puntos simples (véase tema 1-1)





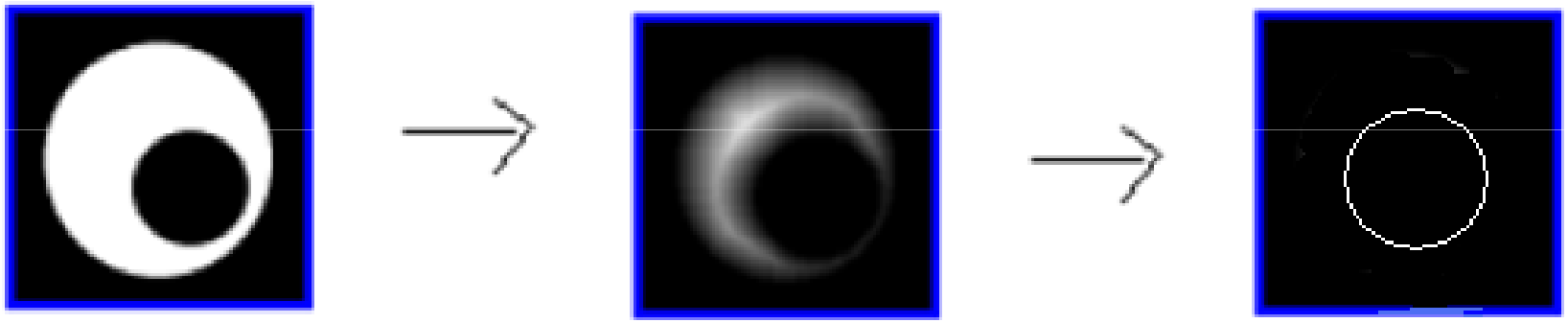
El procedimiento de adelgazamiento consiste en ir borrando sucesivamente y en las cuatro direcciones, los puntos del borde de la imagen, de manera que ***un punto del borde de la imagen se puede eliminar si es simple y no es final***.

Para practicar: **Algoritmo de adelgazamiento**

Descriptores topológicos

Esqueleto

Segundo algoritmo: mediante la *Transformada de la distancia:*



Descriptores topológicos

Esqueleto

Transformada de la distancia:

Definición:
Dado un conjunto *I*, un subconjunto *G* y una función de distancia *d(,),* la transformada de la distancia *DT( )* de *I* respecto a G, asocia a cada punto *p* de *I* el valor:

$$DT(p) = \text{mínimo } \{d(p,q), \text{ para cada } q \text{ de } G\}$$

Si el conjunto *I* es una imagen binaria y el subconjunto G es el conjunto de píxeles blancos de *I,* la transformada de la distancia de *I* asocia, a cada píxel *p* de la imagen, la mínima distancia entre *p* y cualquier píxel blanco.

La transformada de la distancia depende enteramente de la distancia usada para calcularla.

Descriptores topológicos

Esqueleto

Transformada de la distancia:

La transformada de la distancia de una imagen *I* es una matriz del mismo tamaño que la imagen original, que almacena los valores de la transformada de la distancia de cada punto *p* en *I*.

Ejemplo de transformada de la distancia al fondo de la imagen usando la distancia dada por la 8-adyacencia:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Descriptores topológicos

Esqueleto

Transformada de la distancia:

Si *G* es el el conjunto de píxeles blancos de *I* y *A* es el conjuto de píxeles negros, algunas propiedades son:

•*DT(p)*=0 si y sólo si *p* pertenece a *G*.

Si *p* es un píxel negro,

- *DT(p)* es el radio del mayor disco centrado en *p* y totalmente contenido en *A.*

- Si existe exactamente un punto *q* en *G* tal que *DT(p)=d(p,q),* entonces existe un punto *r* de *A* tal que el disco de radio *DT(r)* centrado en *r* contiene totalmente al disco de radio *DT(p)* centrado en *p.*

- Si existen al menos dos puntos *q* y *q'* en *G* tal que *DT(p)=d(p,q)=d(p,q')* entonces *p* es el centro del disco máximo contenido en *A.*

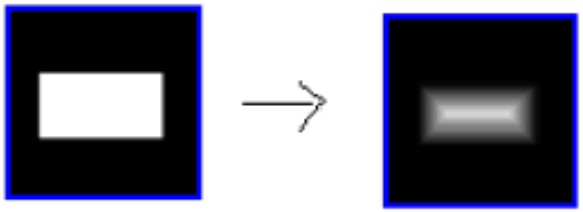
•La transformada de la distancia se puede representar como una imagen en escala de grises, donde el nivel de gris representa el valor de la transformada de la distancia de la imagen en el píxel correspondiente.

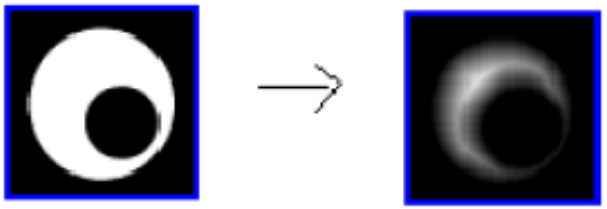
Descriptores topológicos

Esqueleto

***Transformada de la distancia*:**

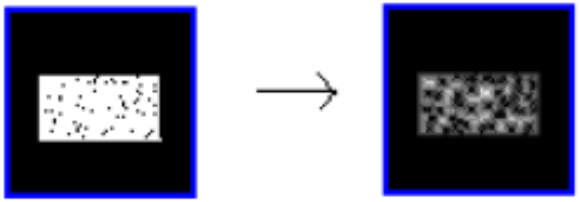
Ejemplos:





La transformada de la distancia es muy sensible a pequeños cambios en el objeto:

También es muy sensible al ruido:



Para practicar: demo on-line

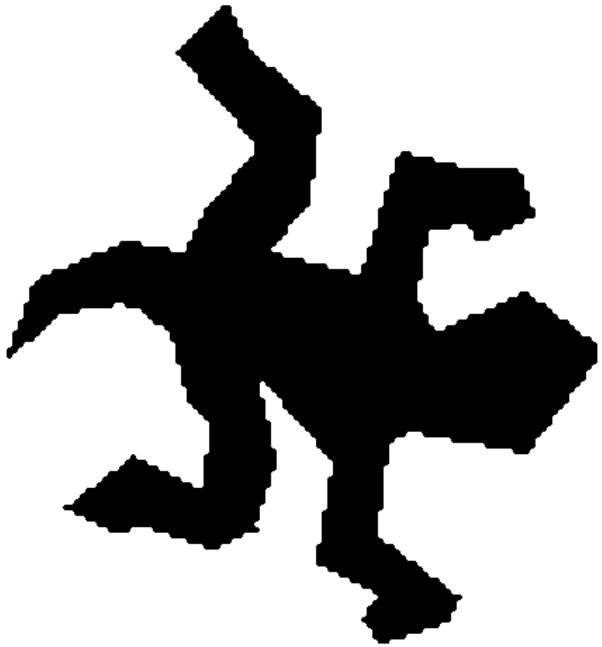
Descriptores topológicos

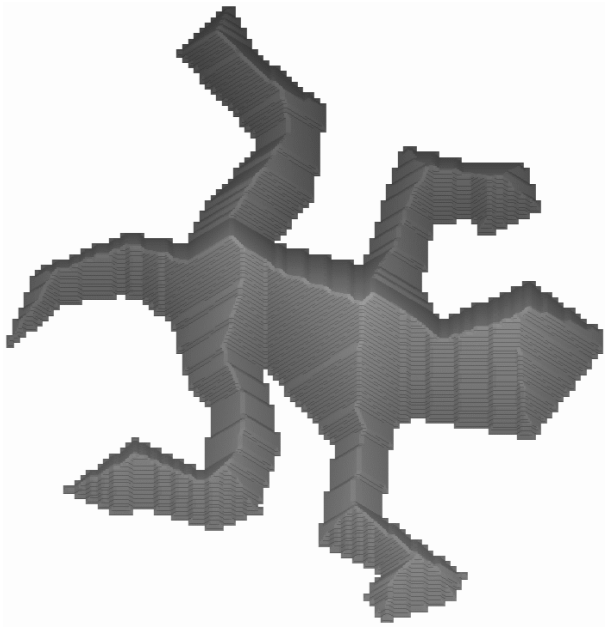
Esqueleto

Transformada de la distancia: Cálculo del esqueleto de una imagen

Usando la transformada de la distancia, un píxel p pertenecerá al esqueleto de la imagen si su transformada es la máxima de la de su entorno local.

Puede ocurrir que este esqueleto no verifique las condiciones que se requerían en la definición (por ejemplo, que no sea conexo). En ese caso, hay que realizar un posterior proceso para poder obtener un esqueleto con las condiciones exigidas.





Descriptores topológicos

Esqueleto

Cálculo de la transformada de la distancia: máscara de distancia

La transformada de la distancia se puede calcular usando determinadas máscaras. La máscara de distancia de tamaño *n x n* es una matriz de dimensiones *n x n* donde un valor $m_{k,l}$ representa la distancia local entre un píxel $p(x_p,y_q)$ y el píxel $q=(x_{p+k},y_{q+l})$.

Generalmente, la máscara está centrada en el píxel *p*.

Con las distancias usuales, las máscaras serían:

	1	
1	0	1
	1	

d_4

1	1	1
1	0	1
1	1	1

d_8

Descriptores topológicos

Esqueleto

Cálculo de la transformada de la distancia: máscara de distancia

Dada una imagen *I* binaria de tamaño *M x* N, sea *A* el conjunto de píxeles negros de la imagen y *G* un subconjunto de *I (generalmente, el conjunto de píxeles blancos)*. La transformada de la distancia se calcula actualizando iterativamente sus valores, tras pasar la máscara, hasta que no haya más cambios.

Primero se inicializa como sigue: sea *p* un punto de *A* entonces:

$$DT_0(p)= \begin{cases} 0, \text{ si } p \text{ está en } G \\ L, \text{ si } p \text{ no está en } G, \text{ siendo } L \text{ un número “grande”} \end{cases}$$

En la iteración $t>0$, la máscara de la distancia se posiciona en el píxel $p=(x_p, y_p)$ y se actualiza el valor de $DT(p)$:

$$DT_t(p)=\text{mínimo } \{ DT_{t-1}(q)+m_{k,l}$$

donde $q=(x_{p+k}, y_{p+l})$ está en I, para todo $m_{k,l}$ de la máscara}

Descriptores geométricos

Perímetro:

La aproximación más simple consiste en calcular el número de píxeles del borde de la imagen.

Si tenemos el código de cadenas de la curva borde, la longitud exacta es el número de componentes horizontales y verticales más $\sqrt{2}$ veces el número de componentes diagonales.

Área:

Se trata del número de píxeles que componen la región.

Compacidad:

La compacidad de una región puede medirse mediante

(perímetro)^2/área

Es una medida que no depende de las dimensiones de la región, por lo que es invariante por cambios de escala uniformes.

.

Descriptores geométricos

Diámetro:

Se trata de hallar el par de píxeles de la región que se encuentran a la máxima distancia.

El segmento que los une se llama eje mayor. Perpendicularmente a éste, se define el eje menor, de manera que el rectángulo que pasa por los cuatro puntos de intersección con el borde, contiene completamente la región.

Excentricidad:

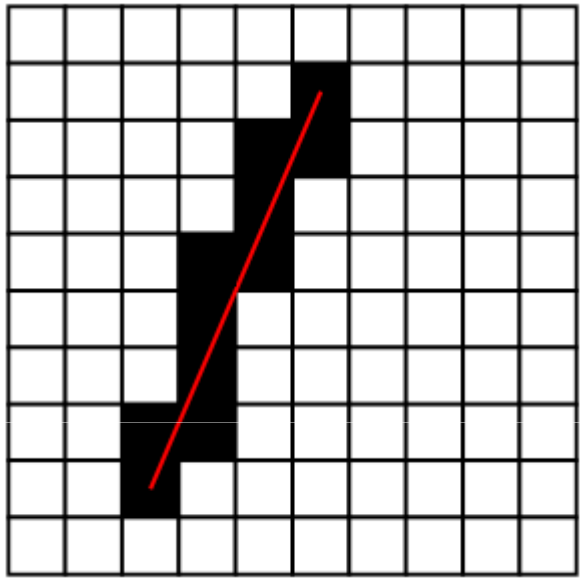
es un descriptor muy útil que consiste en el cociente entre la longitud del eje mayor y la del eje menor.

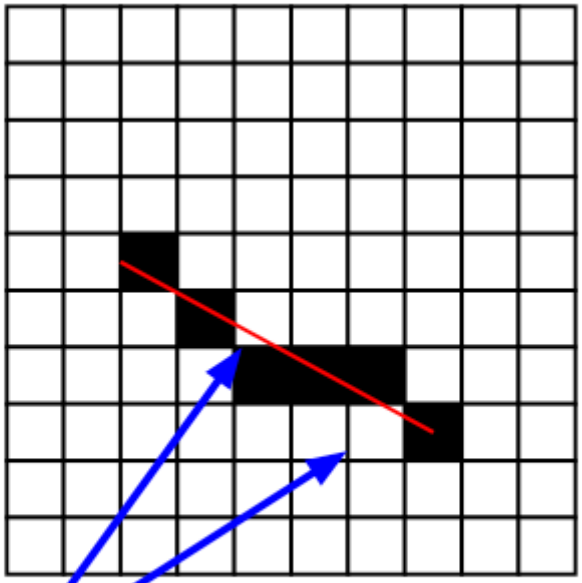
Algunas veces se realiza, previamente, una aproximación poligonal del borde del objeto.

Descriptores geométricos

Un conjunto discreto de puntos es un **recta digital** si y sólo si es la digitalización de al menos una recta en continua.

Se trata de una recta digital con con la (8,4)-adyacencia.





No se trata de un segmento de una recta digital.

Descriptores geométricos

Caracterización de una (8,4)-recta digital mediante su código de cadenas.

El código de cadenas de una recta digital satisface:

3	2	1
4	**P**	0
5	6	7

- A lo más aparecen dos valores en su código, y si hay dos, éstos difieren una unidad módulo 8.
- Uno de los 2 códigos aparece siempre en secuencia de longitud 1.
- El otro valor del código aparece en secuencias de a lo máximo dos longitudes que difieren en 1 excepto, posiblemente, al comienzo y el final del segmento donde puede truncarse.

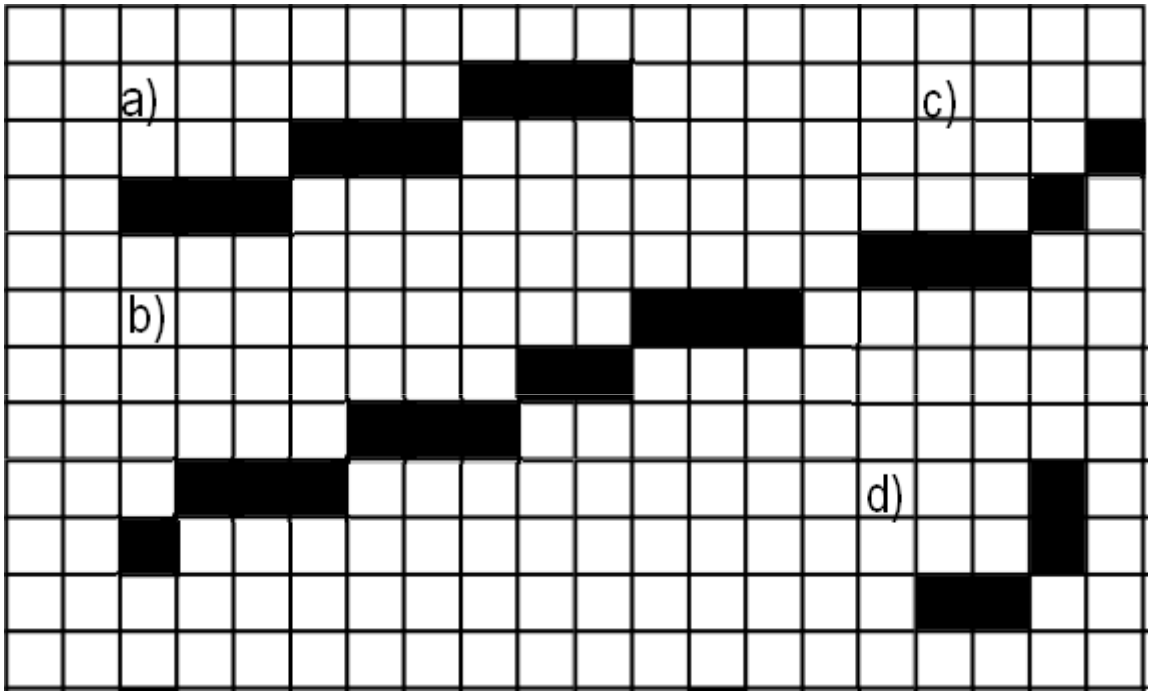
Descriptores geométricos

Caracterización de una (8,4)-recta digital mediante su código de cadenas.

Ejemplo:

a) y b) sí,

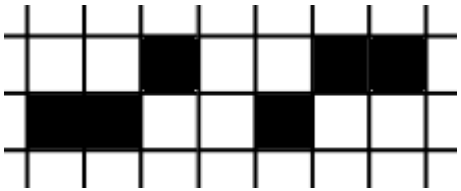
c) y d) no.



Nota:

Puede haber más de una (8,4)-recta digital que una dos puntos, si la dirección de uno al otro no es un múltiplo de 45º.

Ejemplo:

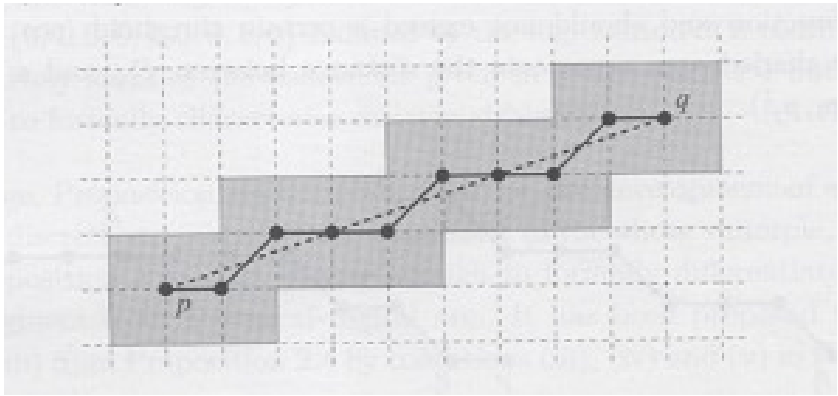


Descriptores geométricos

Dado un camino digital C, se define la **k-pendiente a izquierda (resp. derecha)** de un píxel P de la curva como la pendiente del segmento que une P con un píxel de la curva que se encuentra a k-píxeles de distancia a izquierda (resp. derecha).

Ejemplo:

La 1-pendiente a derecha de P es 0º, la 2-pendiente a derecha es arctg(1/2) .



Se define la **k-curvatura** en P como la siguiente resta:

k-pendiente de P a derecha – *k*-pendiente de P a izquierda.

Descriptores estadísticos

Definimos los **momentos (cartesianos) de orden *(p+q)*** de una imagen digital *I* en escala de grises como:

$$m_{pq} = \sum\sum_{(x,y)} x^p y^q f(x,y) \qquad \text{para} \qquad p,q = 0,1,2,...$$

siendo f(x,y) el nivel de gris del píxel representado por el punto de coordenadas (x,y).

El teorema de representación de los momentos nos dice que el conjunto infinito de momentos determinan unívocamente f(x,y) y viceversa.

Observemos que m_{00} se corresponde con la suma de todos los niveles de gris. En una imagen binaria, se corresponde con el área.

Las coordenadas *(X,Y)* del centroide o centro de masas son:

$$X = m_{10}/m_{00} \quad e \quad Y = m_{01}/m_{00}$$

que en el caso de imágenes binarias (con n píxeles negros) coincide con

$$X = (1/n) \Sigma_{i=1}^{n} x_i \qquad\qquad Y = (1/n) \Sigma_{i=1}^{n} y_i$$

Descriptores estadísticos

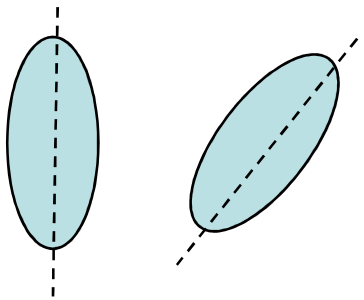
Los **momentos centrales** se usan para reconocer una imagen independientemente de su situación respecto a los ejes de coordenadas. Su fórmula es:

$$\mu_{pq} = \sum\sum_{(x,y)} (x-X)^p (y-Y)^q f(x,y)$$

siendo (X,Y) el centroide de la imagen.

Observemos que:

- Son invariantes por traslación.
- μ_{10} y μ_{01} son cero
- Los valores de μ_{20} y μ_{02} aumentan cuanto mayor sea la componente horizontal y vertical de una figura, respectivamente.

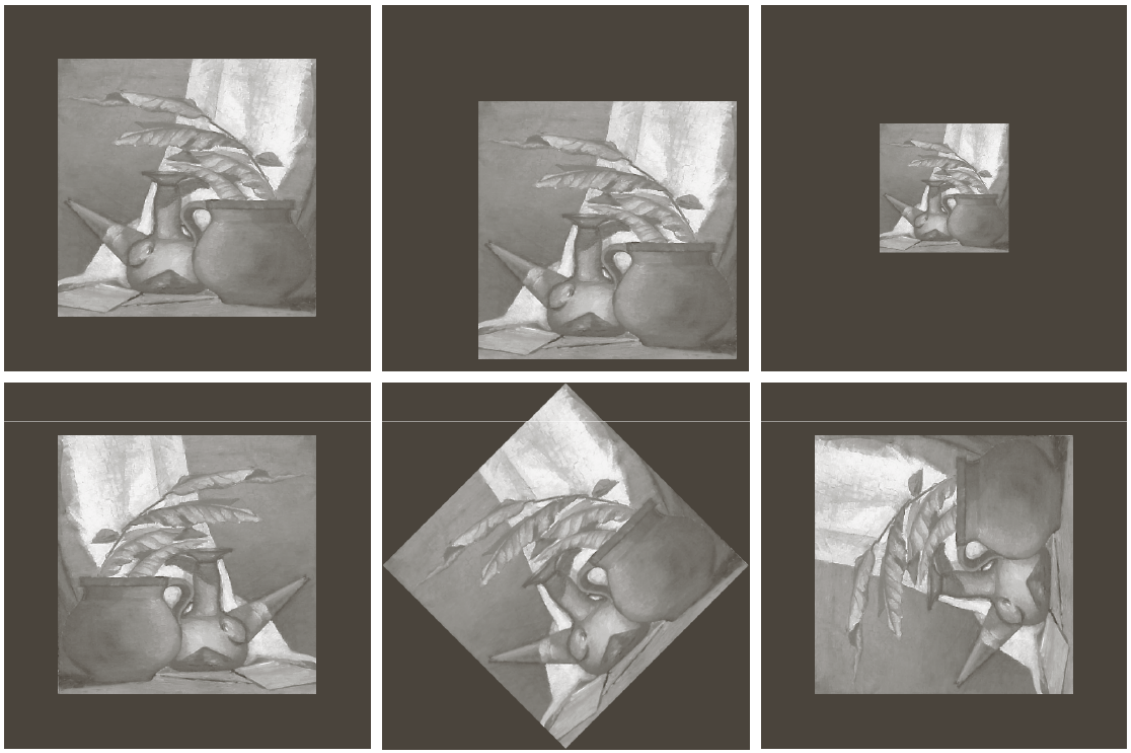


La orientación del eje de mínima inercia es:

$$\frac{1}{2} arctg\left(\frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0} - \mu_{0,2}}\right)$$

Descriptores estadísticos

A partir de los momentos centrales se pueden construir un conjunto de siete momentos invariantes por cambio de escala, simetría y rotación:



$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$
$$\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$
$$\phi_3 = (\eta_{30} - \eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$
$$\phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$
$$\cdots$$

Moment Invariant	Original Image	Translated	Half Size	Mirrored	Rotated 45°	Rotated 90°
ϕ_1	2.8662	2.8662	2.8664	2.8662	2.8661	2.8662
ϕ_2	7.1265	7.1265	7.1257	7.1265	7.1266	7.1265
ϕ_3	10.4109	10.4109	10.4047	10.4109	10.4115	10.4109
ϕ_4	10.3742	10.3742	10.3719	10.3742	10.3742	10.3742
ϕ_5	21.3674	21.3674	21.3924	21.3674	21.3663	21.3674
ϕ_6	13.9417	13.9417	13.9383	13.9417	13.9417	13.9417
ϕ_7	−20.7809	−20.7809	−20.7724	20.7809	−20.7813	−20.7809