

Almacenamiento de imágenes digitales



Segunda parte

Compresión de imágenes digitales

Eliminando:

1. Redundancia en el código.
2. Redundancia entre píxeles.
- 3. Redundancia psicovisual.**

Compresión de imágenes eliminando la redundancia psicovisual

Al contrario de lo que sucedía con los métodos anteriores, la codificación con pérdida se basa en la idea de comprometer la precisión de la imagen descomprimida con el fin de lograr una mayor compresión.

Se hace necesario indicadores que nos permitan medir el error que se comete después de comprimir y descomprimir con respecto a la imagen original. Por ejemplo, el **error cuadrático medio** en una imagen $M \times N$, viene dado por:

$$\sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (\bar{f}(x, y) - f(x, y))^2}$$

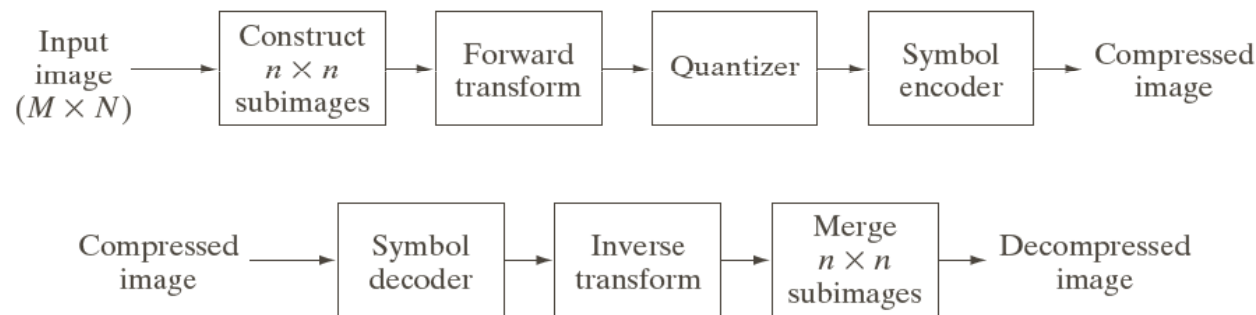
$f(x, y)$ la imagen original y $\bar{f}(x, y)$ la imagen obtenida después de comprimir y descomprimir.

Las técnicas de compresión con pérdida que estudiaremos son las técnicas de **codificación por transformación en bloques** (Block Transform Coding).

Codificación por transformación en bloques

- La imagen se divide en bloques $n \times n$ y en cada uno de ellos se realiza una **codificación por transformación**.

- En la codificación por transformación, se utiliza una **transformada lineal, reversible**, para hacer corresponder la imagen con un conjunto de coeficientes de la transformada, que después se cuantifican y se codifican.



- En la mayor parte de las imágenes naturales, un número significativo de coeficientes (en el dominio transformado) tiene **pequeñas magnitudes** y se pueden cuantificar de forma poco precisa (o **se pueden eliminar totalmente**) sin que ello suponga una distorsión apreciable en la imagen.

Transformadas de la Imagen

Suponiendo que la imagen tiene tamaño $N \times N$, su transformada puede expresarse de la forma:

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) g(x, y, u, v)$$

Donde:

- $T(u, v)$ es la transformada de $f(x, y)$;
- $g(x, y, u, v)$ es el *núcleo (o kernel) de la transformada directa*;
- u y v toman valores de 0 a $N-1$.

La transformada inversa se expresa como:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) h(x, y, u, v)$$

donde $h(x, y, u, v)$ es el *núcleo de la transformada inversa*.

Transformadas de la Imagen

El núcleo directo es **separable** si $g(x,y,u,v)=g_1(x,u) g_2(y,v)$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
 T(u,v) &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) g_1(x,u) g_2(y,v) \\
 &= \sum_{x=0}^{N-1} \left(\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) g_2(y,v) \right) g_1(x,u) \\
 &= \sum_{x=0}^{N-1} T(x,v) g_1(x,u)
 \end{aligned}$$

La transformada bidimensional se puede calcular realizando dos transformadas unidimensionales

Además el núcleo es **simétrico** si g_1 y g_2 son iguales.

Entonces,

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \left(\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) g(y,v) \right) g(x,u)$$

Transformadas de la Imagen

Expresión matricial:

Si el núcleo $g(x,y,u,v)$ es separable y simétrico, la transformada se puede expresar en forma matricial. Sean F , G y T las matrices de elementos

$$(F)_{i,j} = f(i,j); \quad (G)_{i,j} = g(i,j); \quad (T)_{i,j} = T(i,j);$$

Entonces, la transformada

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} g(x,u) f(x,y) g(y,v)$$

puede escribirse de la forma

$$T = G^T F G$$

Para obtener la transformada inversa, se multiplica a derecha e izquierda por la matriz inversa de G y de su traspuesta:

$$(G^{-1})^T T G^{-1} = F$$

Transformadas de la Imagen

Algunos ejemplos de transformadas:

1. La transformada de Fourier.
2. La transformada discreta del coseno.
3. La transformada de Hadamard.
4. La transformada de Walsh.

La transformada de Fourier

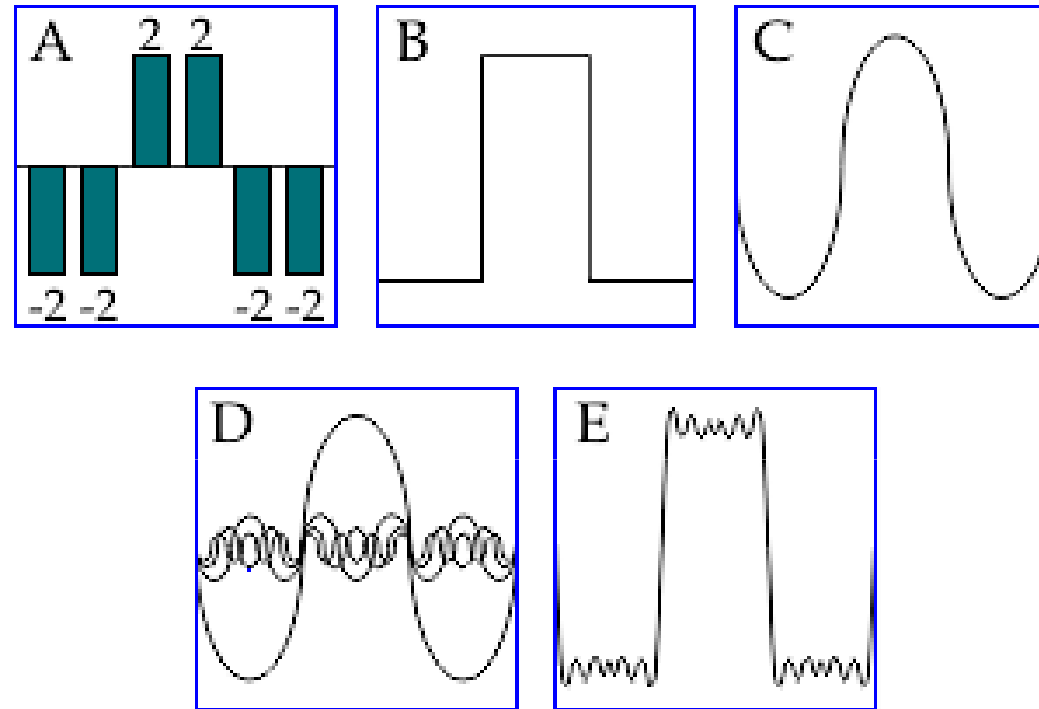
La transformada de Fourier de una función continua e integrable $f(x)$ en una variable real x se define por

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

Observemos que la transformada de una función real es una función compleja. Es decir, $F(u) = R(u) + I(u)i$, donde $R(u)$ e $I(u)$ son la parte real e imaginaria de $F(u)$, respectivamente.

- La variable u recibe el nombre de **variable de frecuencia**.
- El módulo de $F(u)$, $|F(u)| = (R(u)^2 + I(u)^2)^{1/2}$ recibe el nombre del **espectro de Fourier**.
- El cuadrado del espectro se denomina **espectro de potencias** ó **densidad espectral** de $f(x)$.
- Su ángulo $P(u) = \arctg(I(u)/R(u))$ recibe el nombre de **fase**.

La transformada de Fourier



La oscilación sobre un valor medio (**A**) puede representarse por una forma lineal (**B**) y ésta puede reproducirse como una suma de ondas.

La onda **C** describe la forma **B** mucho peor que las cinco ondas del gráfico **D** que vemos sumadas en **E**.

La transformada de Fourier

La inversa de su transformada se define como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} dx$$

Análogamente, se define la transformada de Fourier de una función continua e integrable de 2 variables:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy$$

y su inversa como

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i (ux + vy)} dx dy$$

La transformada de Fourier discreta

Sea $f(x,y)$ una imagen en niveles de grises, tal que $x=0,1,\dots,N-1$ e $y=0,1,\dots,N-1$; y $f(x,y)$ toma valores discretos representando el nivel de gris del píxel (x,y) entonces, la transformada discreta de Fourier de la imagen consiste en una función $F(u,v)$ tal que $u=0,1,\dots,N-1$ y $v=0,1,\dots,N-1$:

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-2\pi i(ux+vy)/N}$$

y su inversa como

$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{2\pi i(ux+vy)/N}$$

Propiedades de la transformada de Fourier

En este apartado, nos vamos a centrar en las propiedades de la transformada de Fourier discreta bidimensional (TFD).

Núcleo separable y simétrico

La ventaja que aporta esta propiedad es el hecho de poder obtener la transformada $F(x,y)$ (o la inversa $f(x,y)$) en dos pasos, mediante la aplicación de la Transformada de Fourier 1-D (o su inversa):

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) e^{-2\pi i u x / N}$$

donde

$$F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i v y / N}$$

En particular, esto significa que la matriz de la transformada se puede obtener mediante un producto de matrices $T = A^T F A$.

Propiedades de la transformada de Fourier

La linealidad

La transformada de Fourier y su inversa son transformaciones lineales, es decir, poseen la propiedad distributiva respecto de la suma.

La traslación

• $TF[f(x,y) e^{i2\pi(Ux+Vy)/N}] = F(u-U, v-V)$ (se traslada el origen de la transformada a (U, V))

• $TF[f(x-X, y-Y)] = F(u, v) e^{-i2\pi(uX+vY)/N}$

Un caso particular de esta propiedad consiste en mover el origen de la transformada de Fourier de $f(x,y)$ al centro de la matriz $N \times N$ que le corresponda, es decir al punto $(N/2, N/2)$. Para ello, podemos hacer uso de que:

$TF[f(x,y)(-1)^{x+y}]$ se hace corresponder con $F(u-N/2, v-N/2)$.

También cabe resaltar, que un desplazamiento en la función $f(x,y)$, no provocará un cambio en la magnitud de su transformada de Fourier. Véase esto matemáticamente en la siguiente expresión:

$$|F(u,v)e^{-i2\pi(uX+vY)/N}| = |F(u,v)|$$

Propiedades de la transformada de Fourier

La simetría y periodicidad

Si $f(x,y)$ es real, la transformada de Fourier satisface:

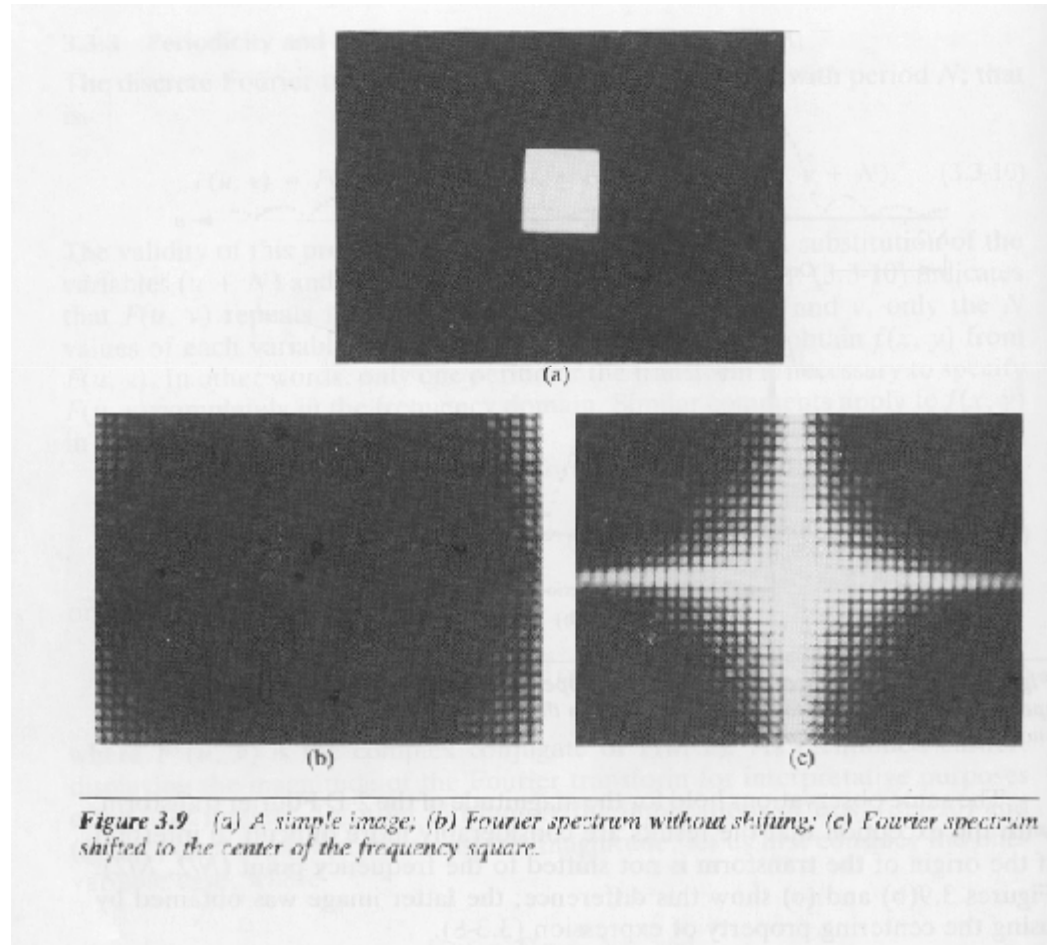
$$|F(u,v)| = |F(-u, -v)|$$

La transformada discreta de Fourier y su inversa son funciones periódicas de periodo N ; es decir,

$$F(u,v) = F(u+N, v) = F(u, v+N) = F(u+N, v+N).$$

Propiedades de la transformada de Fourier

La simetría y periodicidad



Propiedades de la transformada de Fourier

La rotación

Si rotamos la función $f(x,y)$ un ángulo determinado, la transformada de Fourier también será afectada por una rotación del mismo ángulo. Esta propiedad también se da a la inversa, es decir, si la transformada se rota en un determinado ángulo, la transformada inversa también se verá rotada ese mismo ángulo.

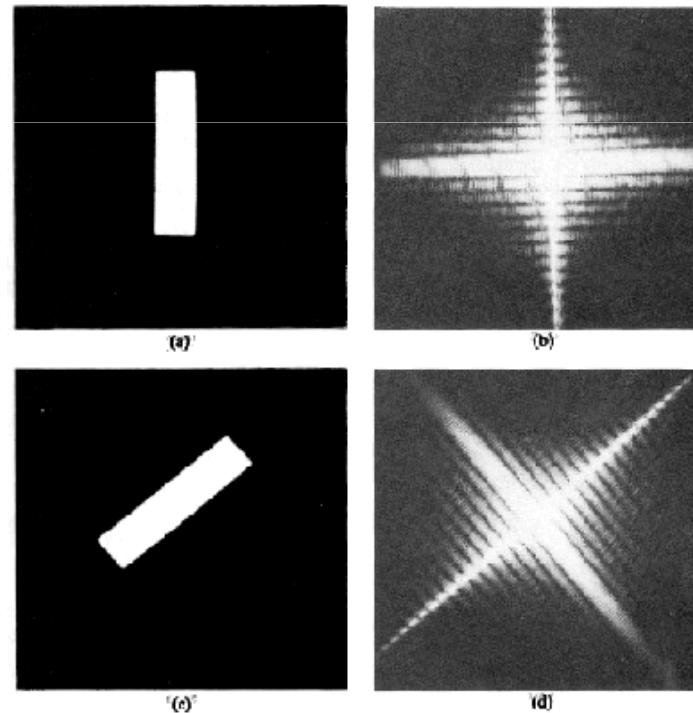


Figure 3.10 Rotational properties of the Fourier transform: (a), a simple image; (b) spectrum, (c) rotated image; (d) resulting spectrum.

Propiedades de la transformada de Fourier

Representación del logaritmo del espectro

El espectro de Fourier suele tener un rango mucho mayor que los usuales para mostrar una imagen. Una técnica usual para evitar esto es considerar el logaritmo del espectro usando la fórmula

$$D(u,v)=C(\log(1+|F(u,v)|))$$

donde C es una constante adecuada de reescalado de la imagen, que se aplica para obtener valores dentro de la paleta de colores disponible.

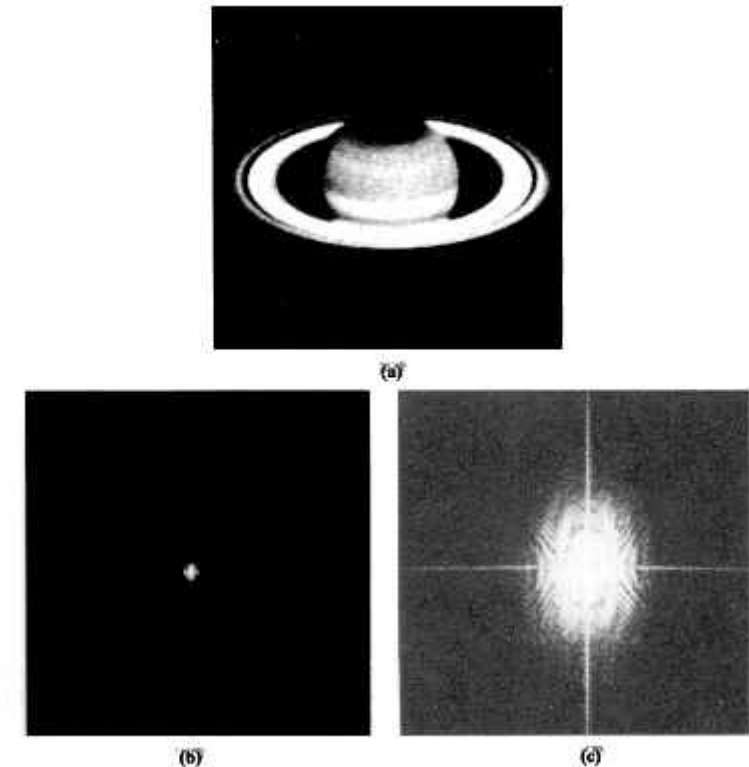


Figure 3.6 (a) A picture of the planet Saturn; (b) display of $|F(u, v)|$; (c) display of $\log[1 + |F(u, v)|]$ scaled to 8 bits (i.e., 0 to 255 gray levels).

Propiedades de la transformada de Fourier

Valor promedio

Una definición ampliamente utilizada del valor promedio de una función discreta de dos dimensiones es:

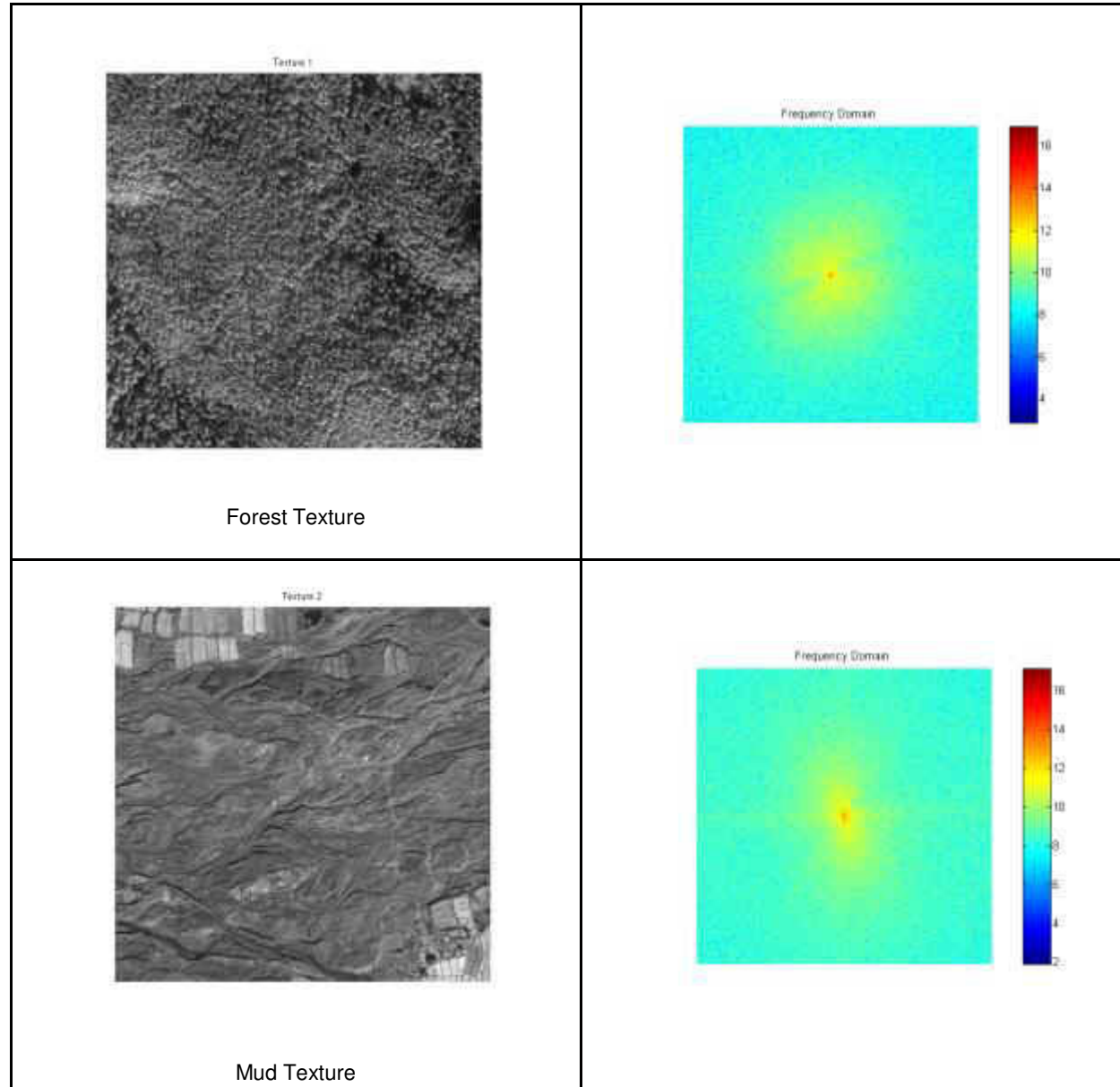
$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

Propiedad:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

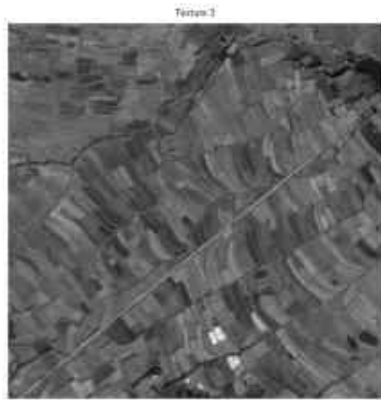
Aplicación del logaritmo del espectro de Fourier

Analizador de texturas

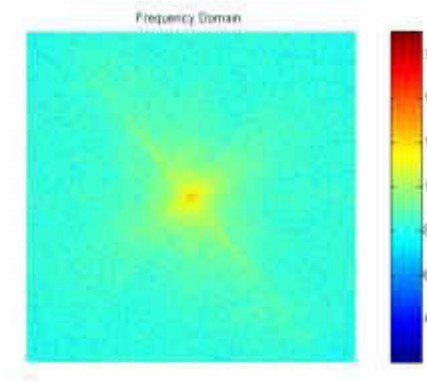


Aplicación del logaritmo del espectro de Fourier

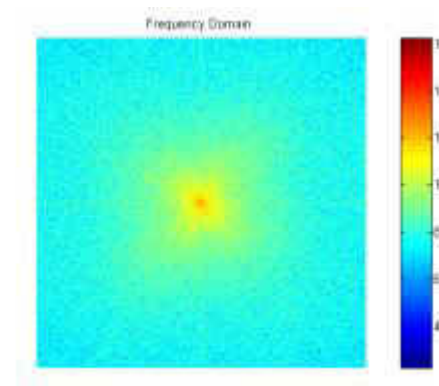
Analizador de texturas



Texturas de campos

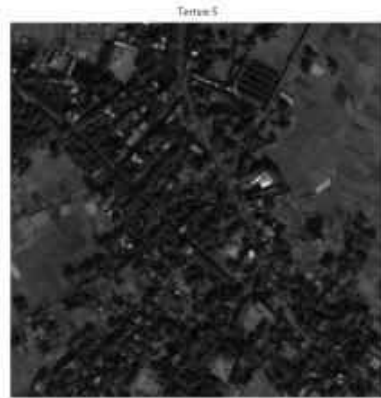


Texturas de charcas



Aplicación del logaritmo del espectro de Fourier

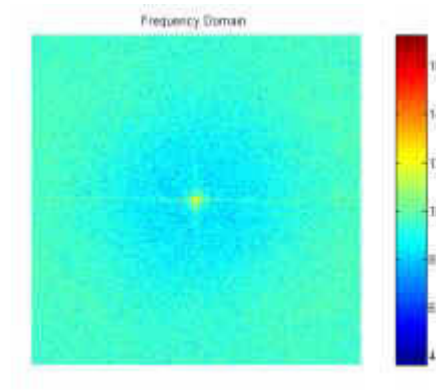
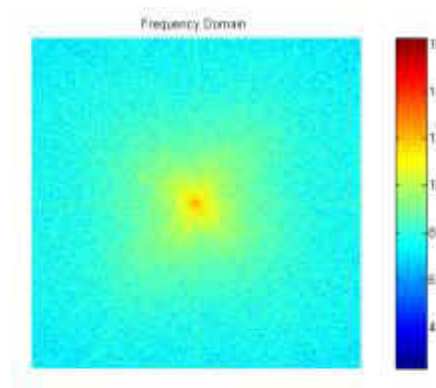
Analizador de texturas



Texturas de ciudad



Texturas de agua



Para practicar:

- [Applet de Java](#)
- <http://www.dai.ed.ac.uk/HIPR2/fourier.htm>
- <http://www.ee.siue.edu/~cvip/>
- <http://rsbweb.nih.gov/ij/applet/>

La transformada rápida de Fourier

- Un algoritmo que calcule la transformada de Fourier **unidimensional** tiene de complejidad **$O(N^2)$** . Existe un algoritmo "rápido" que calcula dicha transformada en **$O(N \log N)$** operaciones (donde $N=2^k$).
- Para conseguir tal reducción, hemos de darnos cuenta que si escribimos $N=2M$ entonces

$$F(u) = \frac{1}{2} \left(F_p(u) + F_i(u) e^{-\pi i u / M} \right)$$

para $u=0,1,2,\dots,M-1$, donde

$$F_{par}(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) e^{-2\pi i u x / M} \quad \text{y} \quad F_{impar}(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) e^{-2\pi i u x / M}$$

La transformada rápida de Fourier

Además se cumple que

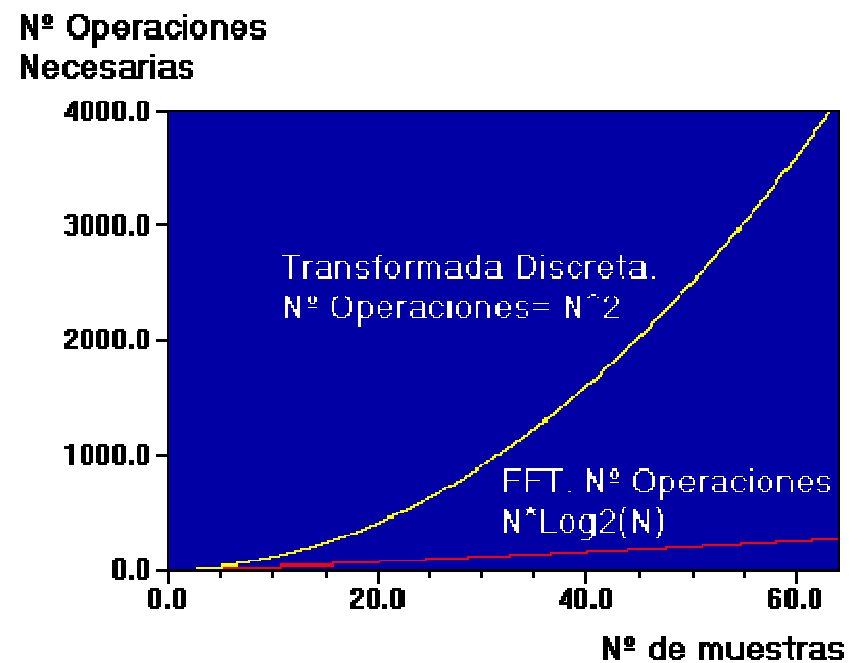
$$F(u + M) = \frac{1}{2} \left(F_p(u) - F_i(u) e^{-\pi i u / M} \right)$$

siendo $u=0,1,2,\dots,M-1$.

Por tanto, para conocer la transformada de Fourier $F(u)$ para todo u , sólo tenemos que calcular $F_p(u)$ y $F_i(u)$ para $u=0,1,2,\dots,N/2-1$. Si volvemos a aplicar el mismo razonamiento para $M=2L$, sólo tendremos que calcular el valor de $F_p(u)$ y de $F_i(u)$ para $u=0,1,2,\dots,N/4 - 1$, y así sucesivamente.

Una situación análoga se tiene para la transformada inversa de Fourier.

La transformada rápida de Fourier



La transformada rápida de Fourier

Para practicar:

- <http://www.dai.ed.ac.uk/HIPR2/>
- <http://www.ee.siue.edu/~cvip/>
- <http://rsbweb.nih.gov/ij/>

La transformada de Hadamard

- La transformada de Fourier se basa en términos trigonométricos.
- La transformada de Hadamard consiste en un desarrollo en serie de funciones básicas cuyos valores son $+1$ o -1 .

La transformada de Hadamard, $H(u,v)$, de una imagen $f(x,y)$ de dimensiones $N \times N$ donde $N=2^k$ viene dada por la fórmula

$$H(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)}$$

donde $u=0,1,\dots,N-1$ y $v=0,1,\dots,N-1$ y $b_j(z)$ es el j -ésimo bit (de derecha a izquierda) de la representación binaria de z .

La transformada de Hadamard

- La transformada **inversa** de Hadamard es idéntica a la anterior, intercambiando las funciones H y f :

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} H(u, v) (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)}$$

La ventaja que tiene esta transformada es que cualquier algoritmo que calcule la transformada directa de Hadamard, puede emplearse sin modificaciones para calcular la transformada inversa.

La transformada de Hadamard

- Los núcleos de la transformada de Hadamard también son simétricos y separables.

$$H(u, v) = \sum_{y=0}^{N-1} \left(\sum_{x=0}^{N-1} g(x, u) f(x, y) \right) g(y, v)$$

donde
$$g(z, w) = \frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} b_i(z) b_i(w)}$$

Por tanto para calcular la transformada de Hadamard bidimensional, se calcula dos veces consecutivas la transformada de Hadamard unidimensional:

$$H(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} b_i(x) b_i(u)}$$

La transformada de Hadamard

Llamemos $g(x,u)$ al núcleo de esta transformada. Es muy fácil calcular la matriz del núcleo para cualquier $N=2^k$ de forma inductiva.

La matriz de Hadamard, de menor k , es $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Inductivamente: $H_{2N} = \begin{pmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{pmatrix}$

La matriz de transformación A tal que $H=AFA$, donde F es la imagen original, viene dada por $A=(1/(N^{1/2}))H_N$.

Por ser $A^{-1}=A$, la formulación de la transformada inversa es idéntica a lo anterior.

La transformada de Hadamard

Ejercicio:

1. Calcular los valores de $g(z,w)$ para $N=4$.
2. Comprobar que la matriz G que representa la función $g(z,w)$ es simétrica con filas y columnas ortogonales.
3. Diseñar un algoritmo que calcula la transformada de Hadamard de una imagen usando la matriz anterior.

La transformada ordenada de Hadamard

A menudo es importante expresar la función base de Hadamard ordenada, de forma que la secuencia aumente con u . Para ello, una ligera variación en la transformada de Hadamard produce la *transformada ordenada de Hadamard* que tiene por fórmula:

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} b_i(x)p_i(u) + b_i(y)p_i(v)}$$

donde

$$p_0(u) = b_{n-1}(u), p_1(u) = b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u), \dots, p_{n-1}(u) = b_1(u) + b_0(u)$$

El núcleo $g(x, y, u, v)$ de esta transformada también es separable y simétrico:

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} b_i(x)p_i(u) + b_i(y)p_i(v)}$$

La inversa de la transformada ordenada de Hadamard tiene la misma fórmula.

La transformada ordenada de Hadamard

Ejercicio: Calcular el núcleo de la transformada ordenada de Hadamard bidimensional para $N=4$.

Cada bloque consiste en 4×4 elementos, correspondientes a $g(x, y, u, v)$, fijando u y v y variando x e y entre 0 y 3.

El origen de cada bloque es la esquina superior izquierda. El blanco y el negro representan $+1$ y -1 respectivamente.

Debido a la similitud entre la transformada de Hadamard y la transformada Walsh, a menudo encontramos en la literatura el término transformada Walsh-Hadamard para referirse a cualquiera de las dos.

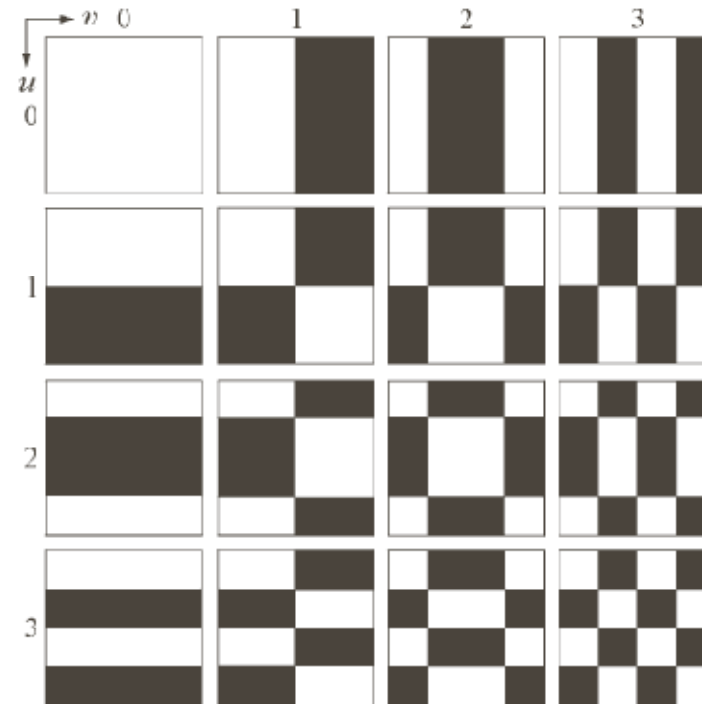


FIGURE 8.22
Walsh-Hadamard
basis functions for
 $n = 4$. The origin
of each block is at
its top left.

Transformada de Fourier	Transformada Hadamard ordenada
•El concepto de frecuencia juega un papel fundamental. •Se descompone en términos de senos y cosenos. •Se usa en análisis, filtrado, reconstrucción y compresión de imágenes.	•El logaritmo del módulo de la transformada de Hadamard no tiene una interpretación física útil. •Se descompone en funciones básicas que son +1 y -1 (más simple computacionalmente hablando). •Se usa principalmente para codificar y comprimir. •La matriz que se obtiene al calcular $g(x,y,u,v)$ variando x e y es "más complicada" a medida que va creciendo u y v.

Para practicar:

<http://www.dai.ed.ac.uk/HIPR2/>

<http://www.ee.siue.edu/>

<http://rsbweb.nih.gov/ij/>