

Control Predictivo Mín-Máx de una planta piloto

D.R. Ramírez, J.K. Gruber, T. Álamo, C. Bordóns y E.F. Camacho

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática,
Escuela Técnica Superior de Ingenieros,
Universidad de Sevilla,
Camino Descubrimientos, s/n., 41092 Sevilla
Email: {danirr, jgruber, alamo}@cartuja.us.es, {bordons,
eduardo}@esi.us.es

Resumen: Este trabajo muestra la aplicación de una estrategia de control predictivo mín-máx basado en modelos (*Min-Max Model Predictive Control, MMMPC*) a una planta piloto en la que se controla la temperatura de un reactor. Para calcular la acción de control se utiliza una aproximación del peor caso, que permite calcular una solución muy cercana a la del problema mín-máx con un coste computacional mucho menor. Por tanto, es un algoritmo cuya complejidad hace factible una implementación en tiempo real para valores típicos de los horizontes de predicción y control. El comportamiento del proceso y del controlador se ilustran mediante resultados experimentales. Copyright © 2008 CEA.

Palabras Clave: control predictivo mín-máx, incertidumbres aditivas, planta piloto.

1. INTRODUCCIÓN

En los controladores predictivos de tipo mín-máx (Camacho y Bordóns, 2004; Campo y Morari, 1987), el valor de la señal de control que se aplica al proceso a controlar, se calcula minimizando el peor caso posible de una función de coste, usualmente cuadrática. A su vez, ese peor caso se calcula maximizando la función de coste con respecto a todos los casos posibles de las perturbaciones e incertidumbres. Resolver estos problemas de optimización requiere una ingente cantidad de cálculos, ya que el problema es de tipo NP duro (Veres y Norton, 1993; Lee y Yu, 1997; Scokaert y Mayne, 1998). Por tanto, la implementación de este tipo de controladores es muy difícil, teniendo como consecuencia que el número de aplicaciones recogidas en la literatura sea muy pequeño, especialmente en el caso de funciones de coste cuadráticas. Sólo se ha informado de su aplicación a plantas con dinámicas lentas (Camacho y Berenguel, 1997) o su aplicación a modelos de simulación complejos (Kim y Kwon, 1998). Para plantas con dinámicas moderadamente rápidas, no es posible resolver en tiempo real el problema mín-máx, salvo para aquellos casos en los que el horizonte de predicción es pequeño o se utiliza una estrategia de reducción de la complejidad como la que se recoge en (Álamo *et al.*, 2005b). También se han presentado estrategias en las que se reduce la complejidad de la formulación basada en la norma 1 (Allwright, 1994; Megías *et al.*, 2002) como en (Álvarez *et al.*, 2006). Cuando las dinámicas a controlar son rápidas, el problema mín-máx no puede resolverse numéricamente en tiempo real y hay que optar por usar soluciones aproximadas (Ramírez *et al.*, 2004). Sin embargo, estas técnicas imponen una gran rigidez en los parámetros del controlador, es decir, un cambio en los horizontes, restricciones o ponderaciones supone calcular de nuevo la solución aproximada. Además hay que tolerar un cierto error en la aproximación de la solución.

Recientemente se ha demostrado que la ley de control MMM-PC es afín a trozos cuando se utiliza una función de coste cuadrática (Ramírez y Camacho, 2006), o cuando se usa una

función de coste basada en la norma 1 (Bemporad *et al.*, 2003; Kerrigan y Maciejowski, 2004). Usando estos resultados y programación matemática multiparamétrica (Bemporad *et al.*, 2003) se pueden obtener formas explícitas de la ley de control. Sin embargo, la partición del espacio de estados resultante, puede llegar a tener un número de regiones que crece de manera combinatoria con el horizonte de predicción. Determinar la región correspondiente a un estado dado puede tomar un tiempo considerable. Para solventar este problema se ha propuesto el uso de árboles de búsqueda binarios (Johansen y Grancharova, 2003; Tøndel *et al.*, 2003). Otro problema es la gran cantidad de memoria que requeriría almacenar todas las regiones que componen la descripción explícita. Además la descripción explícita debe ser recalculada si el modelo del proceso o los parámetros del controlador (horizontes, restricciones y ponderaciones) cambian.

Una solución para el problema de la carga computacional es usar una cota superior del coste máximo en lugar de calcular éste de manera explícita (Álamo *et al.*, 2005a). Por supuesto la cota superior debe poder calcularse con un coste computacional mucho menor que el del coste máximo exacto. En un trabajo anterior (Ramírez *et al.*, 2006) los autores presentaron una cota superior del coste máximo, basada en operaciones matriciales sencillas, que se puede calcular de manera muy rápida y con un error no demasiado grande con respecto a la solución exacta del problema original (Ramírez *et al.*, 2006).

En este trabajo se validan los resultados teóricos presentados en (Ramírez *et al.*, 2006) mediante su aplicación a una planta piloto. Esta planta piloto se utiliza para simular una reacción química exotérmica cuya dinámica es no lineal. Este proceso ha sido empleado en trabajos anteriores, por lo que los resultados experimentales presentados pueden ser comparados con otras estrategias tales como control predictivo no lineal o lineal (Gruber y Bordóns, 2007). Es destacable que el computador sobre el que se implementa el algoritmo de control predictivo, y simultáneamente se ejecuta el SCADA Simatic-IT, no posee

suficiente poder de cálculo para poder implementar una estrategia de control predictivo mín-máx convencional. Por tanto una estrategia computacionalmente eficiente como la empleada en este trabajo es por el momento la única alternativa si se quiere utilizar este tipo de control.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera: la sección 2 presenta el planteamiento del problema de control predictivo y la notación utilizada en este trabajo. La sección 3 presenta el modo de calcular la cota superior del coste máximo y en la sección 4 se presenta una descripción del proceso sobre el que se ha probado el algoritmo de control presentado. En la sección 5 se muestran los resultados experimentales y, en la sección 6 las conclusiones. Finalmente, en el apéndice A se exponen algunos aspectos de implementación del controlador cuando se emplea un modelo de predicción de tipo CARIMA.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sin pérdida de generalidad se considerará un modelo en espacio de estados discreto con incertidumbres aditivas (Camacho y Bordóns, 2004):

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + D\theta(t+1) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^{dim_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{dim_u}$, $\theta(t) \in \{\theta \in \mathbb{R}^{dim_\theta} : \|\theta\|_\infty \leq \epsilon\}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{dim_y}$. Por simplicidad se asume que $\epsilon = 1$ (en caso contrario la matriz D se puede escalar a ϵD). También se considera un horizonte de control N_u y un horizonte de predicción N . La función de coste $J(\theta, \mathbf{u}, x)$ es de tipo cuadrático:

$$\begin{aligned} J(\theta, \mathbf{u}, x) &= \sum_{j=1}^N x(t+j|t)^T Q_j x(t+j|t) \\ &+ \sum_{j=0}^{N_u-1} u(t+j|t)^T R_j u(t+j|t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $x(t+j|t)$ es la predicción del estado para el instante $t+j$ hecha en t cuando los valores futuros de la incertidumbre vienen dados por la secuencia $\theta \in \Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^{N \cdot dim_\theta} : \|\theta\|_\infty \leq 1\}$ y los valores de la señal de control a lo largo del horizonte de control vienen dados por la secuencia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_u \cdot dim_u}$. Por otra parte las matrices de ponderación $Q_j \in \mathbb{R}^{dim_x \times dim_x}$, $R_j \in \mathbb{R}^{dim_u \times dim_u}$ son simétricas y definidas positivas. Esta función de coste puede ser reescrita como (Camacho y Bordóns, 2004):

$$\begin{aligned} J(\theta, \mathbf{u}, x) &= \mathbf{u}^T M_{uu} \mathbf{u} + \theta^T M_{\theta\theta} \theta + 2\theta^T M_{\theta u} \mathbf{u} \\ &+ 2x^T M_{uf}^T \mathbf{u} + 2x^T M_{\theta f}^T \theta + x^T M_{ff} x \end{aligned} \quad (3)$$

El esquema inicial de control predictivo considerado es el de control predictivo mín-máx (Campo y Morari, 1987), en el que la secuencia óptima \mathbf{u}^* se calcula resolviendo un problema mín-máx:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} J^*(\mathbf{u}, x) \\ \text{s.t. } &L\mathbf{u} \leq c + Fx \quad \forall \theta \in \Theta \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$J^*(\mathbf{u}, x) = \max_{\theta \in \Theta} J(\theta, \mathbf{u}, x) \quad (5)$$

con $L \in \mathbb{R}^{nc \times (N_u \cdot dim_u)}$, $F \in \mathbb{R}^{nc \times dim_x}$ y $c \in \mathbb{R}^{nc}$, (siendo nc el número de restricciones). La solución de este problema

se aplica mediante una estrategia de horizonte móvil, tal y como es habitual en todos los esquemas de control predictivo. Los resultados presentados en este trabajo son válidos para MMMPC con predicciones en bucle abierto o en estrategias de *semi-feedback* o pre-estabilización (Mayne, 2001; Rossiter *et al.*, 1998) en las que la señal de control viene dada por:

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) \quad (6)$$

donde la matriz de realimentación del vector de estados K se diseña para obtener alguna propiedad deseada como por ejemplo estabilidad nominal u optimalidad en el sentido LQR. El controlador MMMPC calculará una secuencia de correcciones de control $v(t)$. Mediante esta estrategia la ecuación de estado (1) se puede reescribir como:

$$x(t+1) = A_{CL}x(t) + Bv(t) + D\theta(t+1) \quad (7)$$

con $A_{CL} = (A - BK)$. Es evidente que esta estrategia puede incorporarse en un esquema de MMMPC con un problema de la forma (4).

Al ser el modelo lineal en x , u , θ , y R_j definida positiva, la función de coste cuadrática es convexa en θ y \mathbf{u} y la solución del problema de maximización se alcanzará en al menos uno de los vértices de Θ (Camacho y Bordóns, 2004). Por tanto el problema de maximización (5) es equivalente a

$$J^*(\mathbf{u}, x) = \max_{\theta \in \text{vert}\{\Theta\}} J(\theta, \mathbf{u}, x) \quad (8)$$

La resolución del problema de maximización es un problema NP duro bien conocido, cuya complejidad es exponencial, al tener que evaluarse forzosamente cada uno de los $2^{N \cdot dim_\theta}$ vértices de Θ . Por tanto este problema, y por ende el problema mín-máx (4) sólo pueden resolverse para horizontes de predicción pequeños.

La elección del modelo (1) presenta ventajas e inconvenientes con respecto a otros tipos de modelos con incertidumbre que pueden utilizarse en control predictivo robusto. Una alternativa sería considerar modelos con incertidumbre intervalar en los coeficientes de las matrices o polinomios del sistema (incertidumbres paramétricas), o bien usar modelos LPV (Lineales de Parámetros Variables). Este tipo de modelos describirían mejor la incertidumbre en el sistema y podría obtenerse un mejor control. Sin embargo, su uso en el contexto de un control predictivo mín-máx desemboca en problemas de optimización aún más complejos que los presentados aquí, de manera que su implementación es aún más difícil. Por otra parte, obtener dichos modelos o estimar el estado es también más complejo que en el caso de las incertidumbres aditivas. Por el contrario, los modelos lineales con incertidumbres aditivas son extremadamente sencillos de obtener, dado que la mayor parte de los paquetes de identificación proporcionan unas cotas del error de estimación, que pueden usarse como cotas de la incertidumbre. El resultado final es que el controlador obtenido es equivalente a un MPC lineal más un parámetro que define las cotas de la incertidumbre. Esta simplicidad hace que sea potencialmente atractivo para la industria.

Otra posibilidad es usar elipsoides como alternativa a los hiper-cubos para la acotación de la incertidumbre. Esta opción no es frecuente en control predictivo mín-máx, pero si ha sido empleada con anterioridad, por ejemplo en (Lau *et al.*, 1991). En dicho trabajo se presenta un MMMPC computacionalmente eficiente, pero con la desventaja de no poderse aplicar a procesos inestables, bastante frecuentes en la industria. El uso de elipsoides en lugar de hiper-cubos conlleva problemas de optimización diferentes, dado que en ese caso, el máximo de

la función de coste se alcanza en cualquier punto de la frontera y no en uno de los vértices.

La estrategia adoptada en el esquema de control usado en este trabajo está dirigida a reducir el coste computacional del problema (4). La idea es sustituir el coste máximo $J^*(\mathbf{u}, x)$ en (4) por una cota superior del mismo que pueda ser calculada fácilmente. En la sección 3 se presenta dicha cota, la cual puede calcularse con una complejidad polinomial en lugar de exponencial.

3. CÁLCULO DE LA COTA SUPERIOR DEL COSTE MÁXIMO

En esta sección se presenta el algoritmo que sirve para calcular la cota superior del coste máximo. El cálculo de dicha cota, como se verá a continuación se hace en base a operaciones matriciales sencillas fácilmente implementables. Se describen únicamente los resultados fundamentales, remitiéndose al lector a (Ramírez *et al.*, 2006) para una descripción completa.

De la expresión de la función de coste (3) se infiere que:

$$J^*(\mathbf{u}, x) = \max_{\theta \in \text{vert}\{\Theta\}} \theta^T S \theta + 2\theta^T p(\mathbf{u}, x) + r(\mathbf{u}, x) \quad (9)$$

donde

$$S = M_{\theta\theta}$$

$$p(\mathbf{u}, x) = M_{\theta u} \mathbf{u} + M_{\theta f} x \quad (10)$$

$$r(\mathbf{u}, x) = \mathbf{u}^T M_{uu} \mathbf{u} + 2x^T M_{uf}^T \mathbf{u} + x^T M_{ff} x \quad (11)$$

Por tanto, el cálculo de $J^*(\mathbf{u}, x)$ resulta ser un problema matemático del tipo:

$$\gamma^* = \max_{\theta \in \text{vert}\{\Theta\}} \theta^T S \theta + 2\theta^T p + r \quad (12)$$

Este problema es equivalente a un problema de maximización cuadrática aumentado, tal y como se muestra en la siguiente proposición, cuya demostración se puede encontrar en (Ramírez *et al.*, 2006).

Proposición 1. El problema (12) es equivalente al siguiente problema aumentado:

$$\gamma^* = \max_{\begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta \end{bmatrix} \in \text{vert}\{\Theta_A\}} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r & p^T \\ p & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde $\theta_e \in \mathbb{R}$ y Θ_A es el hipercono unitario aumentado, es decir:

$$\Theta_A = \left\{ \begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta \end{bmatrix}, \theta_e \in \mathbb{R}, |\theta_e| \leq 1, \theta \in \Theta \right\}.$$

□

Por tanto es evidente que el problema aumentado puede reescribirse como:

$$\gamma^* = \max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T H z \quad (14)$$

donde $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica. Supóngase ahora una matriz diagonal T tal que se verifique que $T \geq H$, por tanto:

$$z^T H z \leq z^T T z = \sum_{i=1}^n T_{ii} z_i^2 \leq \text{traza}(T) \|z\|_\infty^2 \leq \text{traza}(T)$$

¹ En este trabajo una desigualdad matricial del tipo $T \geq H$ se cumple si y sólo si $T - H$ es semidefinida positiva.

y de ahí se obtiene que:

$$\gamma^* \leq \text{traza}(T) \quad (15)$$

Es decir, la traza de T , es una cota superior de γ^* . La cota menos conservadora será aquella que se obtenga mediante una matriz T solución del siguiente problema LMI:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \text{mín traza}(T) \\ \text{s.t.} \quad & T \geq H \\ & T \text{ diagonal} \end{aligned} \quad (16)$$

La resolución del problema LMI anterior requiere de algoritmos de optimización especializados (métodos de punto interior) cuyo coste computacional puede ser excesivo. En lugar de esto se propone usar el siguiente esquema de diagonalización que obtiene la cota con operaciones matriciales simples y una subóptimalidad (con respecto a la solución exacta y a σ^*) muy contenida (Ramírez *et al.*, 2006).

Nótese que el objetivo es encontrar la matriz T diagonal más pequeña (es decir con menor traza) tal que se cumpla que $T \geq H$. La estrategia empleada es diagonalizar H sumándole $n - 1$ matrices semidefinidas positivas (siendo n la dimensión de H), todas de la forma $v_i v_i^T$:

$$H + v_1 v_1^T + v_2 v_2^T + v_3 v_3^T + \dots + v_{n-1} v_{n-1}^T = T$$

donde T es una matriz diagonal y los v_i son vectores de dimensión apropiada. El problema es encontrar los vectores v_i , $i = 1, \dots, n - 1$ tales que la matriz T resultante sea diagonal, mientras que el grado de conservadurismo de la cota se mantenga tan bajo como sea posible.

La idea tras la estrategia que se presenta en esta sección es ir diagonalizando la matriz original H una fila y columna más con cada término $v_i v_i^T$ que se suma. En efecto, supóngase que H puede ser particionada como

$$H = \begin{bmatrix} a & b^T \\ b & H_r \end{bmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$ y que queremos sumar el primer término $v_1 v_1^T$ de manera que:

$$\begin{bmatrix} a & b^T \\ b & H_r \end{bmatrix} + v_1 v_1^T = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & \hat{H}_r \end{bmatrix}, \quad d \in \mathbb{R} \quad (17)$$

Es decir, en este primer paso se diagonalizaría parcialmente la matriz original, de manera que la primera fila y columna correspondieran a una matriz diagonal. Una vez calculado v_1 , el proceso continuaría eligiendo convenientemente v_2 de manera que la submatriz \hat{H}_r también sea parcialmente diagonalizada y así sucesivamente.

Para determinar cuanto vale v_1 , supóngase que se elige con la estructura $[\alpha \ e^T]^T$ de manera $v_1 v_1^T$ resulta ser:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ e \end{bmatrix} [\alpha \ e^T] = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha e^T \\ \alpha e & e e^T \end{bmatrix}$$

con $\alpha > 0$. Esto implica que $\alpha e = -b$ y por tanto $e = \frac{-b}{\alpha}$, $d = a + \alpha^2$ y $\hat{H}_r = H_r + \frac{b b^T}{\alpha^2}$.

Con lo anterior queda fijado el cálculo del vector v_1 (y de todos los v_i en general, pues el procedimiento se aplica siempre sobre la submatriz \hat{H}_r resultante), pero resta determinar α . El parámetro α debe ser calculado de manera que se minimice el error introducido por el esquema de diagonalización en el problema aumentado original. De esta manera, la diferencia

entre la cota superior y el coste máximo se mantendría lo más pequeña posible. Este error es:

$$z^T v_1 v_1^T z = z^T \begin{bmatrix} \alpha \\ -\frac{b}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{b^T}{\alpha} \end{bmatrix} z$$

El error será máximo cuando z sea:

$$z^* = \text{signo} \begin{bmatrix} \alpha \\ -\frac{b}{\alpha} \end{bmatrix}$$

(también se cumple cuando z^* es de signo opuesto). Teniendo en cuenta que

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{b^T}{\alpha} \end{bmatrix} z^* = \left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ -\frac{b}{\alpha} \end{bmatrix} \right\|_1$$

(donde $\|x\|_1$ es la norma 1 de x igual a la suma de los valores absolutos de sus componentes), el error máximo es:

$$\left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ -\frac{b}{\alpha} \end{bmatrix} \right\|_1^2$$

El valor de α que minimiza el máximo error se puede calcular fácilmente mediante la obtención del valor que hace que la derivada de

$$\left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ -\frac{b}{\alpha} \end{bmatrix} \right\|_1 = \alpha + \frac{1}{\alpha} \|b\|_1$$

sea igual a cero. Dicho valor de α es:

$$\alpha = \sqrt{\|b\|_1} \quad (18)$$

En resumen, el algoritmo para calcular la cota superior σ_u se concreta en los siguientes pasos:

Algoritmo 1. Algoritmo para calcular la cota superior del coste máximo $\sigma_u(H) \geq \max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T H z$.

1. Sea $T = H \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
2. Para $k = 1$ hasta $n - 1$
3. Sea $H_{sub} = [T_{ij}]$ for $i, j = k \dots n$.
4. Calcúlese α para $H_{sub} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^T & H_r \end{bmatrix}$ usando la expresión $\alpha = \sqrt{\|b\|_1}$.
5. Fórmese $v_k^T = \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{b^T}{\alpha} \end{bmatrix}$.
6. Fórmese $v_e^T = [0 \dots 0 \ v_k^T] \in \mathbb{R}^n$
7. Actualizar T mediante $T = T + v_e v_e^T$.
8. Finpara
9. Calcular la cota superior mediante $\sigma_u(H) = \sum_{i=1}^n T_{ii}$.

Es evidente que por construcción $T \geq H$. Por tanto,

$$\max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T H z \leq \max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T T z = \sigma_u(H).$$

Lo que implica que,

$$\begin{aligned} J^*(\mathbf{u}, x) &= \max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T \begin{bmatrix} r(\mathbf{u}, x) & p^T(\mathbf{u}, x) \\ p(\mathbf{u}, x) & S \end{bmatrix} z \\ &\leq \sigma_u \left(\begin{bmatrix} r(\mathbf{u}, x) & p^T(\mathbf{u}, x) \\ p(\mathbf{u}, x) & S \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Por tanto, $\sigma_u(\cdot)$, tal y como se calcula en el algoritmo 1 es una cota superior del coste máximo.

Nótese que para calcular la cota solo hacen falta operaciones con matrices bastante simples. Esto implica que este algoritmo se puede codificar fácilmente incluso en lenguajes de programación no orientados a los cálculos matemáticos, como los que se suelen encontrar en sistemas industriales empotrados. A modo de ilustración considérese la figura 1 en la que se muestra la implementación del algoritmo 1 en Matlab. Se ha tenido en cuenta en la implementación lo señalado en el comentario 1.

```
function sigma=c_cota_superior(H)
n=size(H,1); k=1; continuar=1; positivo=0;
sigma=0;

while (continuar) & (k<n)
m=n+1-k;
a=H(1,1);
b=H(2:m,1);
alfa=sqrt(sum(abs(b)));
if (alfa==0)
c=zeros(m,1);
else
c=[alfa;-b/alfa];
end;

sigma=sigma+a+alfa^2;
H=H+c*c';
H=H(2:m,2:m);
s=min(min(H));

if (s>=0)
sigma=sigma+sum(sum(H));
positivo=1;
continuar=0;
end
k=k+1;
end;
if (positivo==0)
sigma=sigma+H(1,1);
end;
```

Figura 1. Listado en lenguaje de programación de Matlab que calcula la cota superior propuesta.

3.1 Estrategia de control propuesta

La cota superior calculable mediante el algoritmo 1 se usará en una estrategia de control predictivo de tipo mín-máx, de manera que la acción de control a aplicar en un determinado instante de tiempo y para un estado x será la solución de:

$$\mathbf{u}^*(x) = \arg \min_{\mathbf{u}} \sigma_u \left(\begin{bmatrix} r(\mathbf{u}, x) & p^T(\mathbf{u}, x) \\ p(\mathbf{u}, x) & S \end{bmatrix} \right) \quad (20)$$

s.t. $L\mathbf{u} \leq c + Fx$

la cual se aplica siguiendo una estrategia de horizonte móvil, y donde $p(\mathbf{u}, x)$, $r(\mathbf{u}, x)$ y S se calculan según (10)-(11) y $\sigma_u(\cdot)$ se calcula con el algoritmo 1.

Nótese que el algoritmo 1 realiza $n - 1$ iteraciones, cada una de las cuales posee una complejidad computacional $O(n^2)$, por lo que el algoritmo tiene una complejidad computacional de $O(n^3)$. El tamaño n de la matriz es a su vez $(N \cdot \text{dim}\theta) + 1$, por lo que el número de operaciones necesarias es aproximadamente $c_1((N \cdot \text{dim}\theta) + 1)^3$. En lugar de minimizarse una función de coste cuya evaluación requiere un número exponencial de operaciones (aproximadamente $c_2(2^{N \cdot \text{dim}\theta})$), se minimiza una cota superior de esta función de coste que se puede evaluar en tiempo polinomial.

La resolución del problema (20) se puede realizar utilizando cualquier método de programación no lineal, como por ejemplo la programación cuadrática secuencial (sequential quadratic

programming, SQP). Esta técnica es la que emplea Matlab en su función `fmincon`, que es la que se ha usado en la implementación del algoritmo de control descrito en este trabajo. Debe notarse que la complejidad NP dura del problema mín-máx original reside en el problema de maximización que debe resolverse para cada secuencia u considerada solución candidata del problema (1). Por tanto, una vez sustituido dicho problema de maximización por una cota superior que se calcula en tiempo polinomial, se puede lograr una baja carga computacional, si el algoritmo de minimización converge lo suficientemente rápido a la solución. En el caso de los métodos SQP, la convergencia es frecuentemente superlineal, por lo que dicha baja carga computacional estará garantizada.

Comentario 1. El objetivo perseguido en el algoritmo 1 es encontrar una matriz diagonal T tal que se verifique que $T \geq H \geq 0$. El problema de maximización $\max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T T z$ se

resuelve entonces usando $\sigma_u = \sum_{i=1}^n T_{ii}$. Supóngase que en una

cierta iteración del algoritmo 1 se tiene una matriz $T \geq H$ parcialmente diagonalizada en la que todos los elementos de la submatriz H_{sub} del paso 3 son no negativos. Entonces se cumple que $\max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T T z = \|T\|_1 \geq \gamma^*$. Por tanto no es

necesario continuar el proceso de diagonalización de T ya que en ese paso $\max_{z \in \text{vert}\{\Theta_A\}} z^T T z$ puede acotarse superiormente por

$\sigma_u = \|T\|_1$ y además continuar con el proceso no mejoraría la cota.

4. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO

Para la aplicación del algoritmo propuesto se ha elegido un proceso real representado por una planta piloto. El proceso analizado ha sido estudiado anteriormente por varios autores (Hugo *et al.*, 1988; Szeifert *et al.*, 1995; Gruber y Bordóns, 2007).

4.1 Proceso de laboratorio

El proceso de laboratorio consiste en una planta piloto que puede simular reacciones químicas exotérmicas a base de cambios en la temperatura de un tanque. La planta piloto (ver la figura 2) está situada en la Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla y ha sido utilizada como planta de referencia para propósitos de control en varios trabajos (Bordóns y Camacho, 1998; Ramírez *et al.*, 2004; Gruber y Bordóns, 2007).

Los elementos principales de la planta piloto son el reactor, el intercambiador de calor, la camisa de refrigeración y la válvula de recirculación para manipular el flujo en la camisa de refrigeración (ver la figura 3).

La reducción de la temperatura T del contenido del reactor se realiza mediante una camisa de refrigeración. La disipación de calor provocada por la camisa de refrigeración puede ser regulada mediante la válvula v_8 que manipula el flujo F_j en la camisa. El líquido de refrigeración, agua, proviene de un depósito de 1 m^3 de capacidad, al que retorna después de haber pasado por la camisa del intercambiador. Para mantener la temperatura del agua fría constante se cuenta con una planta de refrigeración auxiliar controlada por termostato que mantiene la temperatura T_{T2} entorno a un punto deseado con un solape de 1 grado aproximadamente.



Figura 2. Planta piloto utilizada para aplicar el MMMPC.

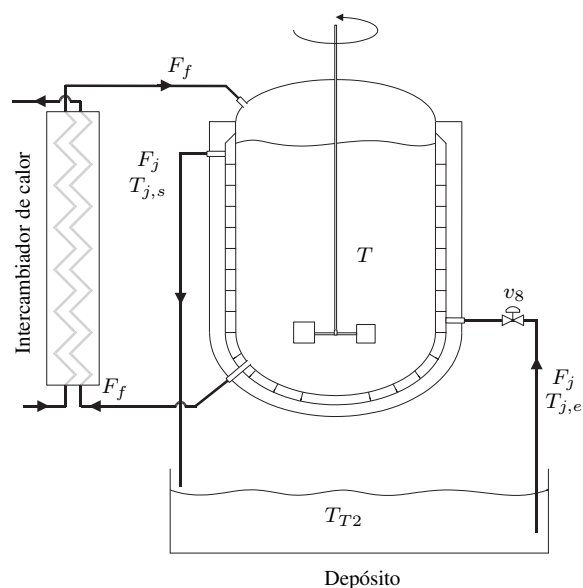


Figura 3. Diagrama de la planta piloto con los cuatro elementos: reactor, intercambiador de calor, camisa de refrigeración y válvula de recirculación.

Con el flujo de alimentación F_f se suministra el reactivo con el fin de mantener la reacción activa. Antes de entrar al reactor, el flujo de alimentación pasa por el intercambiador de calor para reducir la diferencia de temperatura entre el flujo de alimentación y el contenido del reactor. El volumen del contenido del reactor se mantiene constante haciendo que el flujo saliente sea igual al flujo de alimentación F_f . Por consiguiente, como el flujo entrante y el flujo saliente tienen el mismo caudal y casi la misma temperatura, los dos flujos juntos apenas provocan cambios en la energía interna del reactor.

El calor de la reacción, que es función de la concentración del reactivo, puede ser emulado empleando para tal efecto la resistencia eléctrica que hay en el tanque de la planta piloto, según

Tabla 1. Parámetros del modelo y variables constantes

Parámetro	Valor	Unidad
k_0	$1.2650 \cdot 10^{17}$	$\frac{1}{\text{mol}\cdot\text{s}}$
C_p	4.18	$\frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{kg}}$
ΔH	-105.57	$\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$
E/R	13550	K

Variable	Valor	Unidad
V	25	l
M	25	kg
$C_{A,e}$	1.2	$\frac{\text{mol}}{\text{l}}$
F_f	0.05	$\frac{\text{l}}{\text{s}}$
$T_{j,e}$	291.15	K

la ley que rige esta reacción. Este procedimiento de simulación de reacciones ha sido empleado por diversos autores, como (Santos *et al.*, 2001). Para información más detallada sobre el proceso ver (Gruber y Bordóns, 2007).

4.2 Modelo matemático

Aunque no es necesario disponer de un modelo matemático para el diseño del controlador predictivo mín-máx, se presenta en esta sección el modelo del proceso para poner de manifiesto las características no lineales del mismo y la forma de emular el calor generado en la reacción química mediante la resistencia.

En el modelo, anteriormente utilizado en (Lee *et al.*, 2000), se ha considerado que el flujo de alimentación y el flujo saliente del reactor son equivalentes. Como consecuencia de esta suposición el volumen V y la masa M son constantes. Los cambios de la temperatura en el reactor de la planta piloto vienen definidos como:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F_j}{V}(T_{j,e} - T_{j,s}) + \frac{(-\Delta H) \cdot V}{MC_p} k_0 e^{-E/(RT)} C_A^2 \quad (21)$$

donde el primer término corresponde a la disipación de calor por la camisa de refrigeración y el segundo término denota la energía generada por la reacción química exotérmica. Las variables F_j , $T_{j,e}$ y $T_{j,s}$ representan el flujo que circula por la camisa de recirculación así como la temperatura del agua entrando y saliendo de la camisa, respectivamente. C_A es la concentración del reactivo en el reactor. Como el flujo de alimentación pasa por el intercambiador de calor y entra en el reactor casi con la misma temperatura que tiene el contenido del reactor, se ha supuesto que el flujo de alimentación ni suministra ni extrae calor del reactor.

La concentración C_A del reactivo en el reactor de la planta se calcula como:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_f}{V}(C_{A,e} - C_A) - k_0 e^{-E/(RT)} C_A^2 \quad (22)$$

donde $C_{A,e}$ representa la concentración del reactivo en el flujo de alimentación. Los parámetros del modelo y las variables con valores constantes están mostrados en la tabla 1.

Como la temperatura del fluido de refrigeración es variable y no corresponde a la temperatura en el reactor, se ha utilizado la siguiente aproximación, obtenida experimentalmente, del modelo matemático para calcular el intercambio de calor:

$$F_j \cdot (T_{j,s} - T_{j,e}) = \frac{T - \alpha}{\beta} (1 - e^{-\gamma F_j}) \quad (23)$$

con los parámetros $\alpha = 292.19 \text{ K}$, $\beta = 14.94 \text{ s/l}$ y $\gamma = 13.18 \text{ s/l}$.

La mayor parte de la no linealidad del modelo matemático es estática, pero debido a los términos exponenciales y cuadráticos en las ecuaciones diferenciales de la temperatura (21) y de la concentración (22) el modelo posee también una dinámica no lineal.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se expondrán los resultados experimentales obtenidos al aplicar la estrategia de control descrita en la sección 3 a la planta piloto. En este caso se utilizarán modelos de predicción CARIMA con incertidumbres aditivas acotadas. Este tipo de modelos extiende el concepto de ruido presente en los modelos CARIMA tradicionales de manera que se considere una incertidumbre:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{\theta(t)}{\Delta} \quad (24)$$

donde $\Delta = 1 - z^{-1}$ y $\theta(t) \in \{\theta \in \mathbb{R}^{dimy} : \|\theta\|_{\infty} \leq \epsilon\}$, y $dimy$ es la dimensión de $y(t)$. El uso de este tipo de modelos de predicción resulta en una ley de control sin error en régimen permanente. Las diferencias entre implementar el algoritmo de la sección 3 con un modelo de espacio de estados y el modelo CARIMA con incertidumbres aditivas acotadas son pequeñas. En el apéndice A se presenta un resumen sobre los aspectos de implementación del controlador cuando se usa el modelo (24). Por otra parte aunque no se haya utilizado en este trabajo, no hay nada que impida utilizar la formulación *semi-feedback* o pre-estabilización cuando se usa el modelo (24). En ese caso deberá tenerse en cuenta la estructura del controlador interno a la hora de formular la ecuación de predicción del sistema pre-estabilizado.

A continuación se describirá el sistema de control disponible en la planta piloto, se ilustrarán los pasos necesarios para la obtención del modelo de predicción y se expondrán los resultados experimentales propiamente dichos.

5.1 Descripción del sistema de control

Los sensores y actuadores existentes en la planta están conectados a una unidad de control PMC10. Ésta se conecta por ARCnet a un computador personal, sobre el que se ejecuta el sistema de control y monitorización *Simatic-IT* (anteriormente conocido como CUBE, de Orsi Automazione). La arquitectura del sistema *Simatic-IT* está orientada a que los algoritmos de control, cuyo funcionamiento ininterrumpido y sin errores es muy importante, se ejecuten directamente en la unidad PMC10. Sin embargo, el PMC10, basado en el procesador Intel 8086, no posee suficiente capacidad de cálculo para resolver el problema mín-máx. En lugar de eso el algoritmo de control se ha implementado directamente en un PC usando *Matlab* y la comunicación con *Simatic-IT* se realiza utilizando el protocolo *OPC (OLE for Process Control)*. Tanto *Simatic-IT* como el controlador se ejecutan sobre el mismo computador personal, basado en el procesador Pentium II a 300 Mhz. Este computador no tiene suficiente poder de cálculo para resolver exactamente el problema mín-máx de un MMMPC típico, pero si puede calcular la acción de control usando la estrategia propuesta.

5.2 Obtención del modelo de predicción

Con el objetivo de conseguir datos para la identificación de parámetros del modelo de predicción se ha aplicado una *PRMSS* (*Pseudo-Random Multilevel Step Sequence*) en la válvula con periodos lo suficientemente largos como para observar la reacción de la planta piloto a cambios en la entrada (véase la figura 4). Como puede observarse en dicha figura la temperatura del tanque se estabiliza en cada escalón en algo más de dos horas, aunque en todos los casos, las variaciones que sufre en el «equilibrio» son de varios grados. La concentración de reactivo también esta sujeta a variaciones incluso en régimen estacionario. Puede observarse como la ganancia es negativa y claramente variable (mayor cuando se trabaja en aperturas bajas de v_8). Como modelo de predicción se propone un modelo de función de transferencia de primer orden más retraso. Claramente este modelo de bajo orden no puede describir correctamente la dinámica de la planta, pero es un buen procedimiento para poner a prueba la robustez del controlador ante incertidumbres y perturbaciones. Usando los datos de la

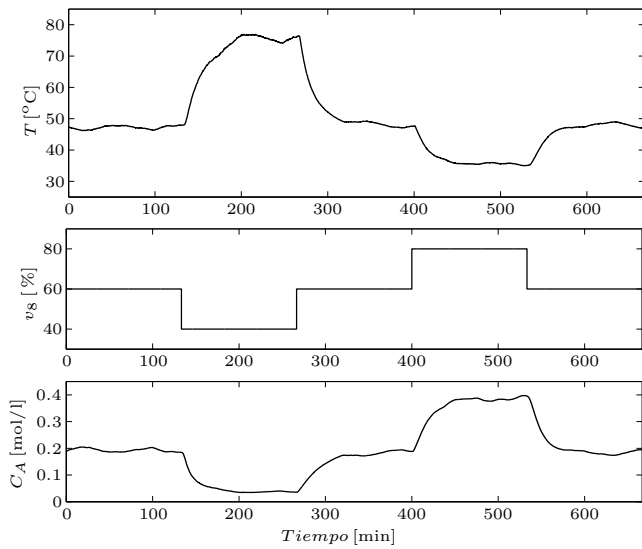


Figura 4. Experimento para la identificación del modelo de predicción. De arriba a abajo: Temperatura del tanque (T), apertura de la válvula de recirculación (v_8) y concentración de reactivo (C_A).

figura 4 se ha obtenido un modelo de primer orden más retraso:

$$G(s) = \frac{-0.975}{950s + 1} e^{-31.25s} \quad (25)$$

A partir de este modelo se ha obtenido un modelo de predicción en tiempo discreto usando como tiempo de muestreo $T_s = 60$ segundos. Con este tiempo de muestreo el modelo de predicción tiene un retardo de 0.52 tiempos de muestreo, que se redondea a 1. Para mantener el orden del modelo lo más bajo posible, se consideran sólo retardos multiples del tiempo de muestreo. De esta manera se evita el uso de aproximaciones del retardo fraccionario como las de tipo Padé, que conllevan la introducción de dinámicas de mayor orden (el bajo orden del modelo facilita el diseño del controlador y su implementación). Así se obtiene el siguiente modelo de predicción de tipo CARIMA:

$$y(t+1) = 0.939y(t) - 0.0597u(t-1) + \frac{\theta(t)}{\Delta} \quad (26)$$

con el polinomio «coloreador» del ruido $C(z^{-1}) = 1$.

El modelo (26) no puede aproximar la dinámica del proceso real con la misma exactitud como otras aproximaciones más elaboradas como modelos LPV (Lineales de Parámetros Variables) (Kothare *et al.*, 1996; Lu y Arkun, 2000) o no lineales (Gruber y Bordóns, 2007), pero como se verá a continuación, usado con la estrategia propuesta se han logrado buenos resultados.

5.3 Resultados obtenidos

El modelo (26) se ha empleado como modelo de predicción en el controlador propuesto. En cuanto a los horizontes de predicción y control se han elegido como valores $N = 15$ y $N_u = 12$. Nótese que el horizonte de predicción incluye aproximadamente una constante de tiempo del proceso, un valor habitual para este parámetro. Por otra parte, dado que el modelo de predicción tiene un retardo adicional, el horizonte de predicción quedaría definido entre $\hat{y}(t+2|t)$ y $\hat{y}(t+16|t)$. Para las matrices de ponderación se han utilizado los valores $Q_j = 1$ y $R_j = 2$. En cuanto al parámetro ϵ , la cota de la incertidumbre aditiva, se ha elegido en función del error de predicción a un paso mostrado en la figura 5. El valor escogido es $\epsilon = 0.25$. Dada la naturaleza integrada de las incertidumbres, el que este valor pueda ser a veces inferior al error a un paso, no es relevante. De hecho se ha elegido este valor por que en el 97% de las muestras el error de predicción a un paso está acotado por ese valor. Para verificar la bondad del modelo identificado se ha utilizado un segundo conjunto de datos experimentales. La figura 6 muestra la temperatura del reactor y el error de predicción del modelo (26) a un paso. La gráfica confirma la cota de incertidumbre de $\epsilon = 0.25$ como elección válida, a pesar de que el experimento se ha realizado tras cambiar la bomba del agua de refrigeración.

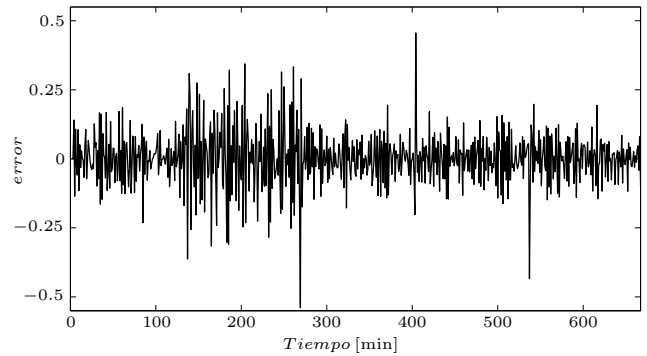


Figura 5. Error de predicción a un paso en el experimento para la identificación del modelo de predicción (26).

Además de los parámetros anteriormente mencionados, dado que el modelo presenta un retardo adicional que puede variar en el proceso real, se ha usado una corrección tipo Predictor de Smith, de manera que la predicción de la salida en el instante $t+1$ obtenida usando el modelo nominal, $\hat{y}_n(t+1|t)$, se corrige de manera que lo que se usa para predecir a partir del instante $t+1$ es:

$$\hat{y}(t+1|t) = \hat{y}_n(t+1|t) + (\hat{y}_n(t|t) - y(t)) \quad (27)$$

El uso de esta simple corrección mejora el comportamiento obtenido al aplicar controladores predictivos en sistemas con retardo (Normey-Rico y Camacho, 2007).

Finalmente en los experimentos realizados se han considerado restricciones sobre la salida, el valor absoluto de la acción de control y los incrementos de la misma:

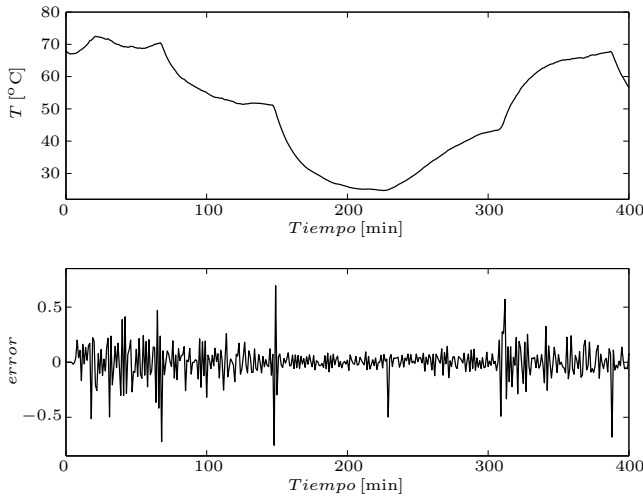


Figura 6. Experimento para la verificación de la bondad del modelo de predicción (26). De arriba a abajo: Temperatura del tanque (T) y error de predicción a un paso.

$$30 \leq \hat{y}(t+j|t) \leq 70 \quad j = 2, \dots, 16$$

$$5 \leq u(t+j|t) \leq 100 \quad j = 0, \dots, 11$$

$$-20 \leq \Delta u(t+j|t) \leq 20 \quad j = 0, \dots, 11$$

Nótese que en las restricciones sobre la salida se ha de considerar el efecto de la incertidumbre (véase el apéndice A).

Se han realizado experimentos de seguimiento de consigna y rechazo de perturbaciones. La figura 7 muestra el experimento de seguimiento de consigna. En la figura se muestran el valor de la temperatura del reactor (T) y la referencia a seguir, el valor de la señal de control (v_8), la concentración de reactivo (C_A) (determina la cantidad de calor que se produce en el reactor) y la temperatura del agua de refrigeración (T_{T2}). Esta última temperatura influye en como se enfría el reactor. Su variación determina también variaciones en la temperatura del reactor. Hay que mencionar que al iniciarse el experimento, el controlador no altera el valor de la señal de control durante los 3 primeros instantes de muestreo hasta que se inician todas las variables y vectores que usa el controlador. En el experimento de seguimiento los valores empleados para la consigna son lo suficientemente diferentes como para que la acción de control tome valores a lo largo de casi todo el rango válido. Es de destacar que en el primer cambio de consigna no se aprecia sobreoscilación alguna, a pesar de que el controlador reacciona con suficiente rapidez. Posteriormente se da un cambio de consigna muy abrupto en el que si se aprecia una pequeña sobreoscilación (de aproximadamente -0.35°C) plenamente justificada por la no linealidad del proceso. En régimen estacionario, la salida se mantiene prácticamente sobre la referencia, mientras que la señal de control no presenta oscilaciones significativas. Los pequeños cambios en la acción de control (inferiores a un 2 %) son necesarios para mantener la salida sobre la referencia ante las variaciones en la cantidad de calor producida y la temperatura del agua fría.

En segundo lugar se presentan dos experimentos de rechazo de perturbaciones. Como perturbaciones se han elegido el flujo de alimentación F_f , ver la ecuación (22), y la apertura de la válvula v_8 . En la figura 8 se muestra el experimento de rechazo de perturbaciones en la entrada. En este experimento, en $t = 71$ min se introduce una perturbación constante en la entrada de valor $\Delta v_8 = 15$ %. Como se puede observar en la figura,

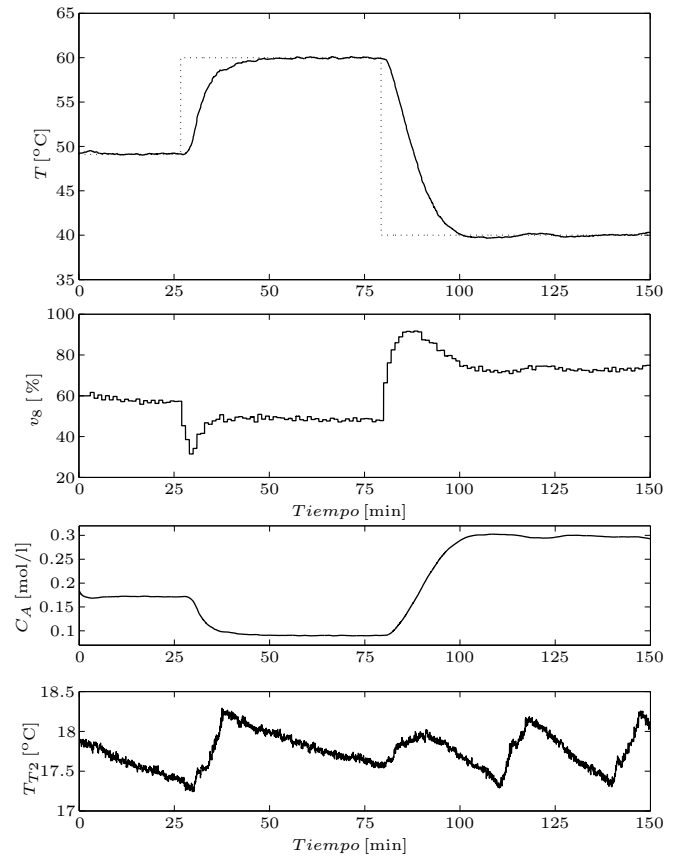


Figura 7. Experimento de seguimiento de consigna. De arriba a abajo: Temperatura del tanque (T) y apertura de la válvula de recirculación (v_8), concentración de reactivo (C_A) y temperatura del agua fría (T_{T2}).

el controlador rechaza la perturbación totalmente en menos de 20 minutos desde su aparición, sin que se observen oscilaciones significativas ni en la salida ni en la acción de control. El mismo comportamiento se observa cuando desaparece la perturbación en $t = 101$ min. Hay que mencionar que al comienzo de este experimento la planta estaba lejos de alcanzar un equilibrio, de ahí que al principio la salida no siga inmediatamente la referencia.

El tercer experimento es mostrado en la figura 9. En este experimento se ha aplicado en $t = 77$ min una perturbación aditiva en el flujo de alimentación de $\Delta F_f = 0.01251/\text{s}$ que corresponde a un 25 % de la gama. Como en el caso anterior la perturbación es rechazada completamente en menos de 20 minutos, aunque en este caso si se observa una pequeña oscilación lenta que se mantiene siempre con error sobre la referencia inferior a 0.2°C .

Es importante reseñar que la señal de control se ha podido calcular sin problemas dentro del tiempo de muestreo escogido (60 segundos). En los ensayos realizados el tiempo de cálculo medio ha sido de 9.54 segundos, con un tiempo máximo de 16.3 segundos y un tiempo mínimo de 5.32 segundos. El esfuerzo computacional requerido es razonablemente bajo si se tienen en cuenta los horizontes utilizados, el escaso poder de cálculo del hardware, y la carga que soporta este último. Para un análisis más exhaustivo de la carga computacional de la cota superior se remite al lector a (Ramírez *et al.*, 2006).

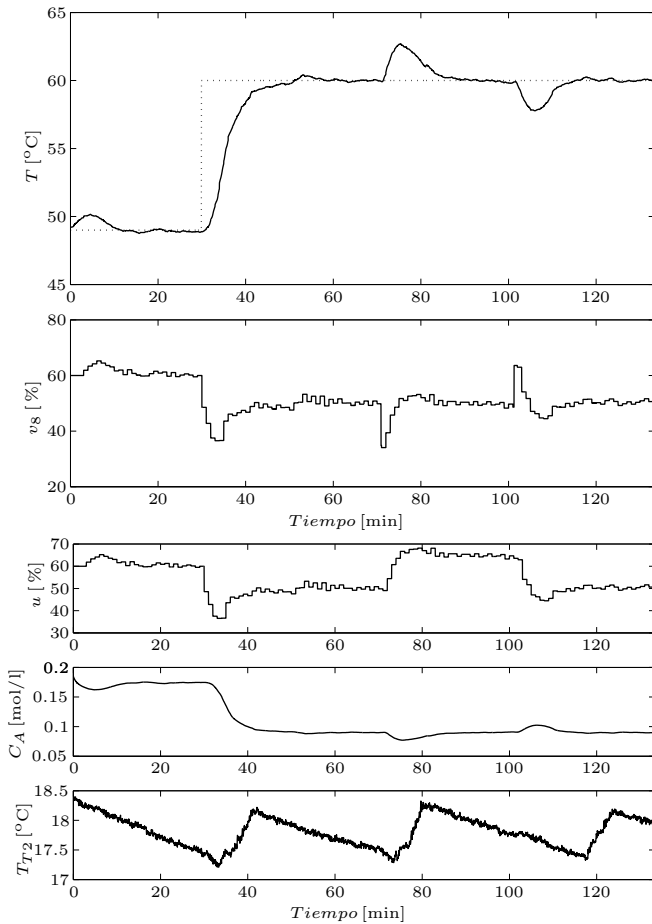


Figura 8. Experimento de rechazo de perturbaciones en la entrada. De arriba a abajo: Temperatura del tanque (T) y apertura de la válvula de recirculación (v_8), salida del controlador (u), concentración de reactivo (C_A) y temperatura del agua fría (T_{T2}).

Para poder comparar los resultados obtenidos se ha realizado un experimento de seguimiento de consigna con un controlador predictivo lineal. El controlador utilizado ha sido un MPC con restricciones basado en el modelo (26) más una corrección tipo Predictor de Smith. Para los horizontes y matrices de ponderación se han utilizado los mismos valores como en el caso del MMMPC ($N = 15$, $N_u = 12$, $Q_j = 1$, $R_j = 2$). Con los dos controladores basados en el mismo modelo discreto lineal y con los mismos parámetros, se pueden comparar directamente los resultados obtenidos (véase la figura 10). Como se puede ver en la gráfica, el MPC estabiliza la temperatura en el valor deseado. Sin embargo, después de un cambio en la referencia, se pueden observar oscilaciones significativas en la temperatura. En la comparación directa de los resultados del MPC y del controlador propuesto, se puede ver que el MMMPC estabiliza la temperatura de forma más eficiente en el valor deseado y muestra menos oscilaciones en la salida y en la acción de control.

En comparación con los resultados de un controlador predictivo no lineal (NMPC) presentado en (Gruber y Bordóns, 2007), se obtienen con el MMMPC propuesto resultados similares. Sin embargo, la robustez del controlador es mayor y el proceso de identificación de un modelo adecuado requiere menos esfuerzo que en el caso de un NMPC.

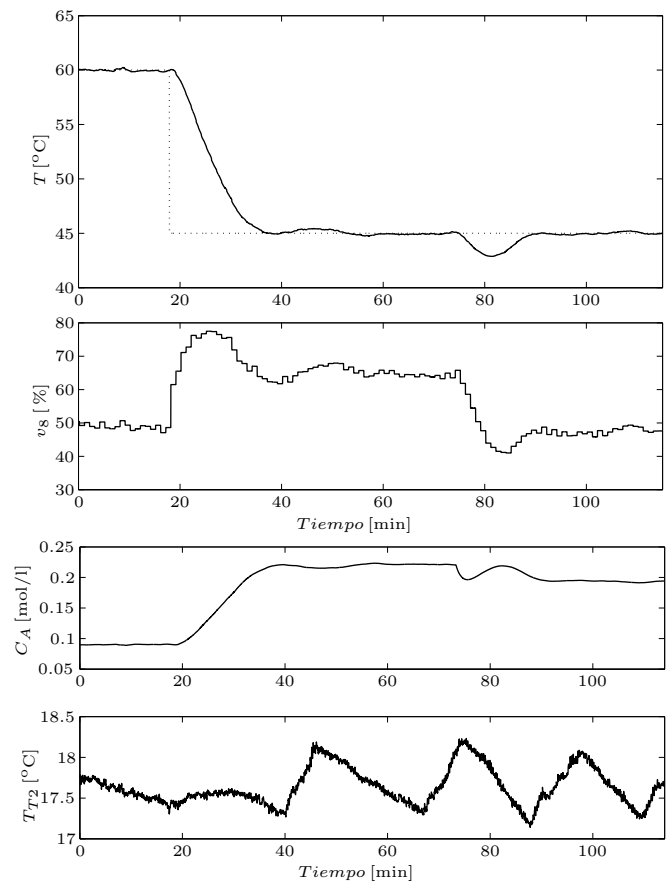


Figura 9. Experimento de rechazo de perturbaciones en el flujo de alimentación. De arriba a abajo: Temperatura del tanque (T) y apertura de la válvula de recirculación (v_8), concentración de reactivo (C_A) y temperatura del agua fría (T_{T2}).

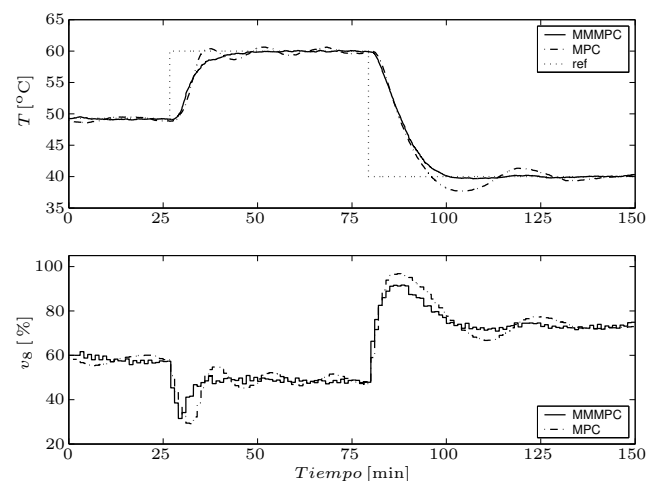


Figura 10. Resultados de experimentos de seguimiento de consigna aplicando el controlador propuesto (MMMPC) y un MPC lineal. De arriba a abajo: Temperatura del tanque (T) y apertura de la válvula de recirculación (v_8).

6. CONCLUSIONES

En este artículo se ha mostrado la aplicación de un *MMMPC* basado en una cota superior del coste máximo a un proceso de laboratorio. El proceso es una planta piloto donde se simula una reacción química exotérmica generando el calor de la reacción mediante una resistencia eléctrica.

En los resultados se ha podido ver un buen comportamiento del sistema estabilizando la temperatura de la planta alrededor del punto de operación. Mediante cambios en la referencia se ha mostrado que el controlador realiza cambios en el punto de operación y compensa las divergencias entre salida y referencia rápidamente. Además se han realizado ensayos con perturbaciones en los que el *MMMPC* ha mostrado su capacidad para compensar los errores provocados por las perturbaciones.

La aplicación mostrada en este trabajo se une al exiguo número de aplicaciones de *MMMPC* reportadas en la literatura especializada. Los bajos requisitos computacionales de la estrategia de control propuesta han permitido emplear tiempos de muestreo apropiados y horizontes de predicción y control realistas. Si bien la dinámica del proceso es lenta (algo que favorece la implementación de controladores *MMMPC*), no es lo suficientemente lenta como para permitir la implementación del *MMMPC* original con los parámetros anteriormente mencionados en la computadora existente. De esta manera se ilustra como el uso de la estrategia propuesta permite aplicar este tipo de controladores a un mayor número de procesos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia a través de los proyectos de investigación DPI2004-07444 y DPI2005-04568.

REFERENCIAS

- Álamo, T., D. Muñoz de la Peña, D. Limón Marruedo y E.F. Camacho (2005a). Constrained Min-Max Predictive Control: Modifications of the Objective Function Leading to Polynomial Complexity. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 710–714.
- Álamo, T., D.R. Ramírez y E.F. Camacho (2005b). Efficient Implementation of Constrained Min-Max Model Predictive Control With Bounded Uncertainties: a Vertex Rejection Approach. *Journal of Process Control* **15**, 149–158.
- Allwright, J.C. (1994). *Advances in Model-Based Predictive Control*. Chap. On min-max Model-Based Predictive Control. Oxford University Press.
- Álvarez, T., J. Cuesta, M. Ontoria, F. Tadeo, J. V. Martín y J. C. Allwright (2006). Control Predictivo Min-Max Multimodelo con Restricciones, Validado sobre una Planta de Laboratorio. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* **3**(3), 68 – 77.
- Bemporad, A., F. Borrelli y M. Morari (2003). Min-max Control of Constrained Uncertain Discrete-Time Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(9), 1600–1606.
- Bordóns, C. y E.F. Camacho (1998). A Generalized Predictive Controller for a Wide Range of Industrial Processes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **6**(3), 372–387.
- Camacho, E. F. y M Berenguel (1997). Robust Adaptive Model Predictive Control of a Solar Plant with Bounded Uncertainties. *International Journal of Adaptive and Signal Processing* **11**, 311–325.
- Camacho, E.F. y C. Bordóns (2004). *Model Predictive Control*. Second edition. Springer-Verlag.
- Campo, P.J. y M. Morari (1987). Robust Model Predictive Control. In: *Proc. American Control Conference*. pp. 1021–1026.
- Gruber, J. K. y C. Bordóns (2007). Control Predictivo no Lineal Basado en Modelos de Volterra. Aplicación a una Planta Piloto. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* **4**(3), 34 – 45.
- Hugo, P., J. Steinbach y F. Stoessel (1988). Calculation of the Maximum Temperature in Stirred Tank Reactors in Case of a Breakdown of Cooling. *Chemical Engineering Science* **43**(8), 2147–2152.
- Johansen, T. y A. Grancharova (2003). Approximate Explicit Constrained Linear Model Predictive Control via Orthogonal Search Tree. *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(5), 810–815.
- Kerrigan, E.C. y J.M. Maciejowski (2004). Feedback min-max Model predictive Control Using a Single Linear Program: Robust Stability and the Explicit Solution. *International Journal of Robust Nonlinear Control* **14**, 395–413.
- Kim, Y.H. y W.H. Kwon (1998). An Application of Min-Max Generalized Predictive Control to Sintering Processes. *Control Engineering Practice* **6**, 999–1007.
- Kothare, M.V., V. Balakrishnan y M. Morari (1996). Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Model Inequalities. *Automatica* **32**(10), 1361–1379.
- Lau, M.K., S. Boyd, R.L. Kosut y G.F. Franklin (1991). A Robust Control Design for FIR Plants with Parameter Set Uncertainty. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 83–88.
- Lee, J.H., K.S. Lee y W.C. Kim (2000). Model-based Iterative Learning Control with a Quadratic Criterion for Time-varying Linear Systems. *Automatica* **36**(5), 641–657.
- Lee, J.H. y Z. Yu (1997). Worst-case Formulations of Model Predictive Control for Systems with Bounded Parameters. *Automatica* **33**(5), 763–781.
- Lu, Y. y Y. Arkun (2000). Quasi-Min-Max MPC algorithms for LPV systems. *Automatica* **36**(4), 527–540.
- Mayne, D.Q. (2001). Control of Constrained Dynamic Systems. *European Journal of Control* **7**, 87–99.
- Megías, D., J. Serrano y C. de Prada (2002). Min-Max Constrained Quasi-Infinite Horizon Model Predictive Control Using Linear Programming. *Journal of Process Control* **12**(4), 495–505.
- Normey-Rico, J. E. y E.F. Camacho (2007). *Control of Dead-Time Processes*. Springer-Verlag.
- Ramírez, D.R., M.R. Arahál y E.F. Camacho (2004). Min-Max Predictive Control of a Heat Exchanger using a Neural Network Solver. *IEEE Trans. on Control Systems Technology* **12**(5), 776–786.
- Ramírez, D.R., T. Álamo, E.F. Camacho y D. Muñoz de la Peña (2006). Min-Max MPC Based on a Computationally Efficient Upper Bound of the Worst Case Cost. *Journal of Process Control* **16**, 511–519.
- Ramírez, D.R. y E.F. Camacho (2006). Piecewise Affinity of Min-Max MPC With Bounded Additive Uncertainties and a Quadratic Criterion. *Automatica* **42**, 295–302.
- Rossiter, J., B. Kouvaritakis y M. Rice (1998). A Numerically Robust State-Space Approach to Stable-Predictive Control Strategies. *Automatica* **34**, 65–73.
- Santos, L.O., P.A.F.N.A. Afonso, J.A.A.M. Castro, N.M.C. Oliveira y L.T. Biegler (2001). On-Line Implementation of

- Nonlinear MPC: an Experimental Case Study. *Control Engineering Practice* **9**(8), 847–857.
- Sckaert, P.O.M. y D.Q. Mayne (1998). Min-Max Feedback Model Predictive Control for Constrained Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(8), 1136–1142.
- Szeifert, F., T. Chovan y L. Nagy (1995). Process Dynamics and Temperature Control of Fed-Batch Reactors. *Computers & Chemical Engineering* **19**(1), 447–452.
- Tøndel, P., T. A. Johansen y A. Bemporad (2003). Evaluation of Piecewise Affine Control via Binary Search Tree. *Automatica* **39**(5), 945–950.
- Veres, S.M. y J.P. Norton (1993). Predictive Self-Tuning Control by Parameter Bounding and Worst Case Design. *Automatica* **29**(4), 911–928.

Apéndice A. ASPECTOS RELACIONADOS CON LA FORMULACIÓN ENTRADA-SALIDA

Si se elige una representación entrada-salida como en (24), la ecuación que recoge de manera condensada la evolución de la salida del proceso a lo largo del horizonte de predicción toma la forma

$$\mathbf{y} = G_u \mathbf{u} + G_\theta \boldsymbol{\theta} + F_x x \quad (\text{A.1})$$

donde G_u, G_θ y F_x son matrices que pueden obtenerse del modelo del sistema y de los parámetros del controlador, usando diversos métodos como el de la ecuación diofántica (Camacho y Bordóns, 2004). Otra forma más intuitiva es calcular G_u en base a los coeficientes de la respuesta ante escalón del sistema (Camacho y Bordóns, 2004) y calcular el vector de respuesta libre $F_x x$ haciendo evolucionar el sistema a partir del estado actual, suponiendo que la señal de control permanece constante. Por otra parte, dado que la incertidumbre puede considerarse como una entrada más, la matriz G_θ puede calcularse de la misma forma que la matriz G_u pero asumiendo que $B(z^{-1}) = 1$ en el caso del método de la ecuación diofántica o mediante la respuesta del sistema ante un escalón de $\theta(t)$. Nótese que en el caso de un modelo CARIMA, el vector \mathbf{u} contiene los incrementos de control futuros (Camacho y Bordóns, 2004) y el estado puede formarse con los valores presentes y pasados de las salidas y de los valores pasados de los incrementos de la señal de control:

$$x = [y(t), \dots, y(t-n_a), \Delta u(t-1), \dots, \Delta u(t-n_b)]^T$$

donde n_a y n_b son los ordenes de los polinomios $(1 - z^{-1})A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ respectivamente. Con esas predicciones y asumiendo que $Q_j = 1 \forall j = 1, \dots, N$ se puede expresar la función de coste como:

$$J(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, x) = (G_u \mathbf{u} + G_\theta \boldsymbol{\theta} + F_x x - \mathbf{w})^T \cdot (G_u \mathbf{u} + G_\theta \boldsymbol{\theta} + F_x x - \mathbf{w}) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} \quad (\text{A.2})$$

donde R es una matriz diagonal de la forma

$$R = \text{diag}(R_0, \dots, R_{N_u-1})$$

y \mathbf{w} es un vector que contiene los valores futuros para la referencia: $\mathbf{w} = [w(t+1), \dots, w(t+N)]^T$. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se considerará que el objetivo es regular la salida del sistema a cero, es decir $w(t+j) = 0$ para $j = 1, \dots, N$. Teniendo en cuenta esto en la expresión (A.2) y operando se llega a la expresión (3) siendo las matrices $M_{uu} = G_u^T G_u + R$, $M_{\theta\theta} = G_\theta^T G_\theta$, $M_{\theta u} = G_\theta^T G_u$, $M_{uf} = G_u^T F_x$, $M_{\theta f} = G_\theta^T F_x$, $M_{ff} = F_x^T F_x$.

Por otra parte, las restricciones más habituales a tener en cuenta son aquellas que se imponen sobre el incremento en la señal de control, la amplitud de la señal de control y la salida del proceso. Estas restricciones se formulan como:

$$\begin{aligned} \underline{u} &\leq u(t) - u(t-1) \leq \bar{u} \\ \underline{U} &\leq u(t) \leq \bar{U} \\ \underline{y} &\leq y(t) \leq \bar{y} \quad \forall \theta(t) \in \{\theta \in \mathbb{R}^{\dim y}: \|\theta\|_\infty \leq \epsilon\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de predicción:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}\underline{u} &\leq \mathbf{u} \leq \mathbf{1}\bar{u} \\ \mathbf{1}\underline{U} &\leq T\mathbf{u} + u(t-1)\mathbf{1} \leq \mathbf{1}\bar{U} \\ \mathbf{1}\underline{y} &\leq G_u \mathbf{u} + G_\theta \boldsymbol{\theta}_i + F_x x \leq \mathbf{1}\bar{y} \quad \forall \boldsymbol{\theta}_i \in \Theta \end{aligned}$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector de dimensión apropiada cuyos componentes son todos uno y T es una matriz triangular inferior de unos y dimensión apropiada. Por otra parte la restricción sobre la salida debe verificarse para cualquier realización extrema de la incertidumbre, significando esto que la restricción de la salida debe replicarse una vez por cada posible realización extrema de la incertidumbre (es decir para cada vértice de Θ), esto es, i variará de 1 hasta 2^N . No obstante esto no implica que se hayan de considerar 2^N vectores de restricciones para la salida, ya que se pueden descartar las restricciones redundantes, explorando cada componente de cada vector y reteniendo las más restrictivas. Así se tendría un solo vector de restricciones.

Las restricciones anteriormente consideradas se pueden escribir en forma condensada como:

$$L\mathbf{u} \leq c + Fx \quad \forall \boldsymbol{\theta}_i \in \text{vert}\{\Theta\} \quad (\text{A.3})$$

con:

$$L = \begin{bmatrix} I_{N \times N} \\ -I_{N \times N} \\ T \\ -T \\ G_u \\ -G_u \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_x \\ F_x \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} \mathbf{1}\bar{u} \\ -\mathbf{1}\underline{u} \\ \mathbf{1}\bar{U} - \mathbf{1}u(t-1) \\ -\mathbf{1}\underline{U} + \mathbf{1}u(t-1) \\ \mathbf{1}\bar{y} - G_\theta \boldsymbol{\theta}_i \\ -\mathbf{1}\underline{y} + G_\theta \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix}$$

La ley de control MMMPC con restricciones se calculará resolviendo en cada instante el problema mín-máx (4).

Comentario 2. Acerca de como eliminar restricciones redundantes (Álamo *et al.*, 2005a) considérese la j -ésima restricción sobre la salida (la que afecta a $\dot{y}(t+j|t)$), la cual se puede expresar como:

$$G_u^j \mathbf{u} + G_\theta^j \boldsymbol{\theta}_i \leq \bar{y} - F_x^j x \quad \forall \boldsymbol{\theta}_i \in \Theta$$

donde el superíndice j indica la j -ésima fila de la matriz correspondiente. Para la parte que depende de la incertidumbre, se cumple que

$$\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} G_\theta^j \boldsymbol{\theta} = \max_{\|\boldsymbol{\theta}\| \leq \epsilon} G_\theta^j \boldsymbol{\theta} = \epsilon \|G_\theta^j\|_1$$

donde $\|G_\theta^j\|_1$ es la norma 1 de G_θ^j definida como la suma de los valores absolutos. Por tanto la restricción se cumplirá para todos los valores de $\boldsymbol{\theta}_i \in \Theta$ si y sólo si se verifica la restricción

$$G_u^j \mathbf{u} \leq \bar{y} - \epsilon \|G_\theta^j\|_1 - F_x^j x$$