Coordenadas de Kunz

Pedro A. García Sánchez

Universidad de Granada

Sanlúcar de Barrameda, Noviembre 29-30, 2014

(DEMACON2)

Semigrupos numéricos

Definición

Un semigrupo numérico S es un subconjunto de los números naturales cerrado para la suma, de forma que $0 \in S$ y existe $\max(\mathbb{Z} \setminus S)$

Ejemplo:
$S = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$

Conjuntos de Apéry

Definición

Sea $m \in S \setminus \{0\}$. El conjunto de Apéry de m en S es
$$\mathrm{Ap}(S,m) = \{s \in S \mid s - m \notin S\}$$

Caracterización

$$\mathrm{Ap}(S,m) = \{w_0, \ldots, w_{m-1}\}$$
$$\text{con } w_i = \min\{s \in S \mid s \equiv i \mod m\}$$

Ejemplo:

$S = \{0, 3, 5, 6, 8, \to\}$; $\mathrm{Ap}(S,3) = \{0, 10, 5\}$

Propiedades

Escritura

$s \in \mathbb{Z}$, entonces existen únicos $k \in \mathbb{Z}$ y $w \in \mathrm{Ap}(S, m)$ tales que $s = km + w$

Pertenencia

$s \in S$ si y sólo si $k \in \mathbb{N}$ si y sólo si $s \geq w_{s \bmod m}$

Coordenadas de Kunz

Sea S un semigrupo numérico y sea $m \in S \setminus \{0\}$

$$\mathrm{Ap}(S, m) = \{0, w_1, \ldots, w_{m-1}\}$$

$w_i = k_i m_i + i$,

$\boxed{(k_1, \ldots, k_{m-1}) \text{ son las coordenadas de Kunz de } S \text{ (con respecto a } m)}$

Además $w_i + w_j = l_{ij} m + w_{i+j \mod m}$

El cono de Kunz

Por tanto $(k_1, \ldots, k_{m-1})$ es un conjunto de soluciones enteras de

$$\begin{cases} x_i \geq 1 & \text{para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \\ x_i + x_j - x_{i+j} \geq 0 & \text{para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ x_i + x_j - x_{i+j} \geq -1 & \text{para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m \end{cases}$$

Si m es el menor entero positivo del semigrupo, cada punto de ese cono corresponde con un semigrupo de multiplicidad m

Género

Definición

El género de S es el cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$

El conjunto de semigrupos con multiplicidad m y género g se corresponde con el conjunto de soluciones enteras de

$$\begin{cases} x_i \geq 1 & \text{para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \\ x_i + x_j - x_{i+j} \geq 0 & \text{para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ x_i + x_j - x_{i+j} \geq -1 & \text{para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m \\ x_1 + \cdots + x_{m-1} = g & \end{cases}$$

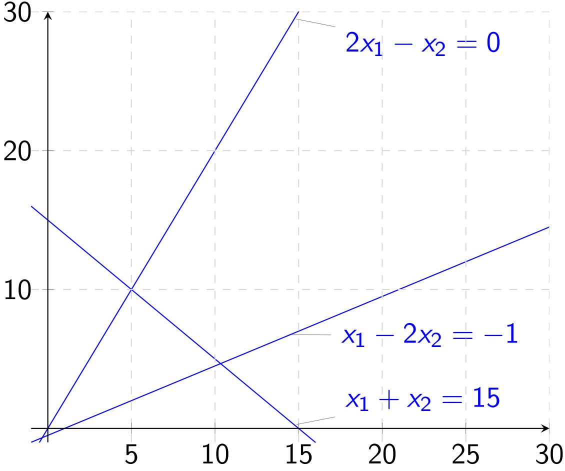
Ejemplo

Veamos cuantos semigrupos tenemos con multiplicidad 3 y género 15

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$$

```
gap> c:=NmzCone(["inhom_inequalities",[[1,0,-1],[0,1,-1],[2,-1,0],[-1,2,1]],
> "inhom_equations",[[1,1,-15]]]);
<a Normaliz cone with long int coefficients>
gap> sol:=NmzModuleGenerators(c);
[[10,5,1], [9,6,1], [8,7,1], [7,8,1], [6,9,1], [5,10,1]]
```

Dibujo



Comprobación

```
gap> List(sol, l->l{[1,2]});
[ [ 10, 5 ], [ 9, 6 ], [ 8, 7 ], [ 7, 8 ], [ 6, 9 ], [ 5, 10 ] ]
gap> l:=NumericalSemigroupsWithGenus(15);;
gap> Length(last);
2857
gap> Filtered(l,s->MultiplicityOfNumericalSemigroup(s)=3);
[<Numerical semigroup with 3 generators>,<Numerical semigroup with 3 generators
 <Numerical semigroup with 3 generators>,<Numerical semigroup with 3 generators
 <Numerical semigroup with 3 generators>,<Numerical semigroup with 3 generators
gap> List(last,MinimalGeneratingSystem);
[ [ 3, 17, 31 ], [ 3, 20, 28 ], [ 3, 23, 25 ], [ 3, 22, 26 ], [ 3, 19, 29 ],
  [ 3, 16 ] ]
```