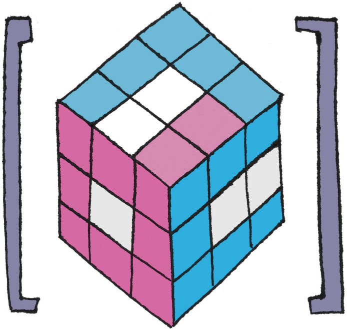
Monoides, factorizaciones y presentaciones

P. A. García-Sánchez

Departamento de Álgebra

Universidad de Granada

Fundada en 1531



S un monoide conmutativo

- Notación aditiva (aunque lo usual es multiplicativa; dominios de integridad de los que prescindimos de la suma)
- Cancelativo ($a + b = a + c$ implica $b = c$)
- Atómico (todo elemento es suma de un número finito de átomos o irreducibles)

Factorizaciones

Sea $\mathcal{A}(S)$ el conjunto de átomos (o irreducibles) de S

Al monoide abeliano libre $\mathrm{Z}(S) = \mathcal{F}(\mathcal{A}(S))$ se le conoce como monoide de factorizaciones de S, al único homomorfismo verificando

$$\pi\colon \mathrm{Z}(S) \to S \quad \text{tal que} \quad \pi(u) = u \quad \text{para cada} \quad u \in \mathcal{A}(S)$$

se le llama homomorfismo de factorizacion de S, y

$$\sim_S = \{(x, y) \in \mathrm{Z}(S) \times \mathrm{Z}(S) \mid \pi(x) = \pi(y)\}$$

es la congruencia núcleo de π, o congruencia asociada a S

Dado $s \in S$, $\mathrm{Z}(s) = \pi^{-1}(s)$ es el conjunto de factorizaciones de s (en S)

Longitudes

La longitud de $z = \sum_{a\in\mathcal{A}(S)} z_a a$ es $|z| = \sum z_a$
Dado $s \in S$, $\mathsf{L}(s) = \{|z| : z \in \mathsf{Z}(s)\} = \{l_1 < \cdots < l_k < \cdots\}$

Conjuntos de distancias

El conjunto de distancias de s es
$\Delta(s) = \{l_2 - l_1, l_3 - l_2, \ldots, l_k - l_{k-1}, \ldots\}$, o el conjunto vacío si $k = 1$

$$\Delta(S) = \bigcup_{s\in S} \Delta(s)$$

Elasticidad

La elasticidad de $s \in S$ es

$$\rho(s) = \frac{\sup \mathsf{L}(s)}{\min \mathsf{L}(s)}$$

La elasticidad de $s \in S$ es $\rho(S) = \sup_{s\in S} \rho(s)$

```
gap> s:=NumericalSemigroup(5,7,11);
<Numerical semigroup with 3 generators>

gap>
LengthsOfFactorizationsElementWRTNumericalSemigroup(100,s);
[ 10, 12, 14, 16, 18, 20 ]

gap> DeltaSetOfFactorizationsElementWRTNumericalS...
[ 2 ]

gap> ElasticityOfFactorizationsElementWRTNumericalS...
2
```

mcd

Dados $z = \sum_{a\in\mathcal{A}(S)} z_a a$ y $z' = \sum_{a\in\mathcal{A}(S)} z'_a a$ dos elementos de $\mathrm{Z}(S)$, su máximo común divisor es

$$z \wedge z' = \sum_{a\in\mathcal{A}(S)} \min\{z_a, z'_a\} a$$

Distancias

Para z, $z' \in \mathrm{Z}(S)$, la distancia de z a z' es

$$\mathrm{d}(z, z') = \max\{|z - (z \wedge z')|, |z' - (z \wedge z')|\}$$

N-cadenas

Dados $s \in S$ y $z, z' \in \mathrm{Z}(s)$, una N-cadena de factorizaciones de z hasta z' es una secuencia $z_0, \ldots, z_k \in \mathrm{Z}(s)$ tal que $z_0 = z$, $z_k = z'$ y $\mathrm{d}(z_i, z_{i+1}) \leq N$ para todo i

Grado de catenariedad

El grado de catenariedad de S, $\mathrm{c}(S)$, es el mínimo $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que para cada $s \in S$ y cualesquiera dos factorizaciones $z, z' \in \mathrm{Z}(s)$, existe una N-cadena de z hasta z'

ω-primalidad

$\omega(S)$ es el mínimo de los $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tales que para cualquier átomo a, si $a | \sum_{i \in I} a_i$ (en S), entonces existe $\Omega \subseteq I$ con $|\Omega| \leq N$ tal que $a | \sum_{i \in \Omega} a_i$

Grado de amansamiento

El grado de amansamiento, $\mathrm{t}(S)$, es el mínimo de los $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tales que para todo $s \in S$, $z \in \mathrm{Z}(s)$ y cualquier átomo a tal que $a | s$ (en S), existe $z' \in \mathrm{Z}(s)$ de forma que $a | z'$ (en $\mathrm{Z}(S)$) y $\mathrm{d}(z, z') \leq N$

$$2 + \mathrm{supp}\Delta(S) \leq \mathrm{c}(S) \leq \omega(S) \leq \mathrm{t}(S) \leq \omega(S)^2$$

$$\rho(S) \leq \omega(S)$$

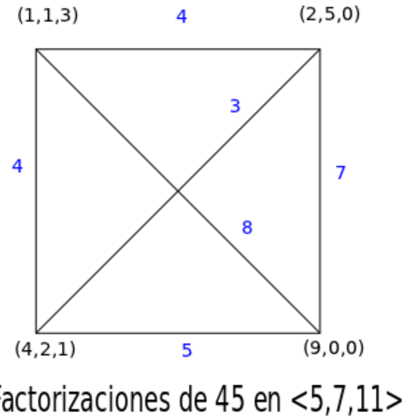
```
gap> CatenaryDegreeOfNumericalSemigroup(s);
5

gap> OmegaPrimalityOfNumericalSemigroup(s);
5

gap> TameDegreeOfNumericalSemigroup(s);
5
```

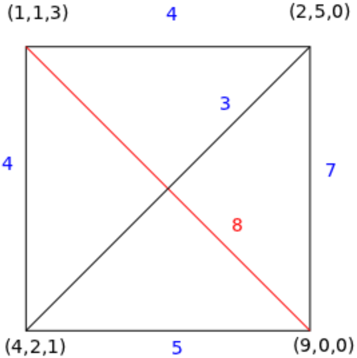
Un ejemplo

Grado de catenariedad



Un ejemplo

Grado de catenariedad



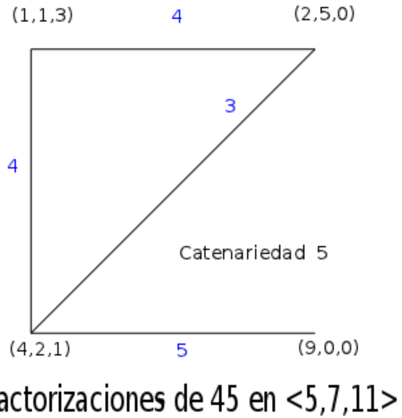
Factorizaciones de 45 en <5,7,11>

Un ejemplo

Grado de catenariedad

Un ejemplo

Grado de catenariedad



Recordemos que

$$\pi \colon \mathsf{Z}(S) \to S \quad \text{tal que} \quad \pi(u) = u \quad \text{para cada} \quad u \in \mathcal{A}(S)$$

$$\sim_S = \{(x, y) \in \mathsf{Z}(S) \times \mathsf{Z}(S) \mid \pi(x) = \pi(y)\}$$

Dadas z y z' factorizaciones de $s \in S$, con $0 \neq d = z \wedge z'$, tenemos $z - d$ and $z' - d$ son factorizaciones de $s - \pi(d)$, y podemos ir desde z hasta z' usando factorizaciones de $s - \pi(d)$, y luego trasladando por d

$\mathcal{R}$-clases

Decimos z y z' están $\mathcal{R}$-relacionadas si existen $z_1, \ldots, z_t$ factorizaciones de s tales que

- $z_1 = z$, $z_t = z'$;
- $0 \neq z_i \wedge z_{i+1}$

Elementos de Betti

Un elemento s de S es un elemento de Betti si su conjunto de factorizationes tiene más de una $\mathcal{R}$-clase

Sea S un monoide cancelativo y conmutativo que cumple la concidión de cadena ascendente para ideales principales, o equivalentemente, que no existen secuencias infinitas $s_0, \ldots, s_n, \ldots$ de forma que $s_i - s_{i+1} \in S$ para todo i

Con los elementos de Betti construimos la congruencia $\sim_S$

Sea $s \in S$ y $x, y \in \mathsf{Z}(s)$. Entonces existen $z_1, \ldots, z_t \in \mathsf{Z}(s)$ de forma que

- $z_1 = x$, $z_t = y$,
- para todo $i \in \{1, \ldots, t-1\}$, $(z_i, z_{i+1}) = (a_i + c_i, b_i + c_i)$ con $c_i \in \mathsf{Z}(S)$ y además a_i no está en la $\mathcal{R}-$clase de b_i (y por tanto a_i y b_i son factorizaciones de un elemento de Betti de S)

```
gap> s:=NumericalSemigroup(5,7,11);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> MinimalPresentationOfNumericalSemigroup(s);

[ [ [ 2, 0, 1 ], [ 0, 3, 0 ] ], [ [ 3, 1, 0 ], [ 0, 0, 2 ] ],
[ [ 5, 0, 0 ], [ 0, 2, 1 ] ] ]
```

Los elementos de Betti son 21, 22 y 25

El supremo de $\Delta(S)$ se “alcanza” en los elementos de Betti

El grado de catenariedad se alcanza también en los elementos de Betti

Otros casos especiales

En el caso de presentaciones genéricas o con un único elemento de Betti

$$\mathrm{c}(S) = \mathrm{t}(S) = \omega(S)$$

Y la elasticidad se alcanza en los elementos de Betti (cuando el existe un sólo elemento de Betti)

Recordemos que

$$\pi\colon \mathsf{Z}(S) \to S \quad \text{tal que} \quad \pi(u) = u \quad \text{para cada} \quad u \in \mathcal{A}(S)$$

$$\sim_S = \{(x, y) \in \mathsf{Z}(S) \times \mathsf{Z}(S) \mid \pi(x) = \pi(y)\}$$

es, además de una congruencia, un monoide atómico
Si $S = \langle n_1, \ldots, n_p \rangle$, $\mathcal{A}(\sim_S)$ son las soluciones minimales de

$$n_1 x_1 + \cdots + n_p x_p - n_1 y_1 - \cdots - n_p y_p = 0$$

Primitivos

Los elementos primitivos de $\sim_S$ son los átomos que no son de la forma (e_i, e_i)

```
3 5 7 -3 -5 -7 = 0.

(4,0,0,0,1,1) (0,0,5,0,7,0) (0,0,4,1,5,0) (0,0,3,2,3,0)
(0,0,2,3,1,0) (0,0,3,7,0,0) (0,7,0,0,0,5) (5,0,0,0,3,0)
(0,2,0,1,0,1) (0,1,1,4,0,0) (0,3,0,5,0,0) (1,5,0,0,0,4)
(2,3,0,0,0,3) (3,1,0,0,0,2) (7,0,0,0,0,3) (1,0,1,0,2,0)
(1,0,0,1,0,0) (0,1,0,0,1,0) (0,0,1,0,0,1)

Numero de soluciones: 19
Tiempo de computo: 0s
```

El grado de amansamiento se alcanza en los elementos que intervienen en los primitivos de $\sim_S$

La elasticidad se alcanza en esos elementos con soporte mínimo

Calculando la ω-primalidad

$$\omega(S) = \sup_{a \in \mathcal{A}(S)} \left(\min\{|z| : z \in \mathrm{Minimals}_{\leq} \mathsf{Z}(a+S)\} \right)$$

Dado $s \in S$ no nulo,

$$\mathrm{Ap}(S, s) = \{x \in S \mid x - s \notin S\}$$

Semigrupos numéricos

Si S es un semigrupo numérico, entonces $\mathrm{Ap}(S, s)$ tiene exactamente s, uno por cada clase de congruencia módulo s

- El grado de catenariedad se alcanza en un elemento de la forma $\mathrm{Ap}(S, m) + a$ con m el elemento positivo más pequeño de S, y a un átomo de S
- El grado de amansamiento y la ω-primalidad se alcanzan en un elemento de la forma $\mathrm{Ap}(S, a) + a'$ con a y a' átomos de S