V Encuentro de Trabajo. Proyecto: Nuevos desafíos de la Matemática Combinatoria

Una formulación MIP para secuenciación óptima sobre máquinas en paralelo bajo incertidumbre

Eduardo Conde

Departamento de Estadística e
Investigación Operativa
Universidad de Sevilla

SANLÚCAR DE BARRAMEDA, 28-30 noviembre 2014

1. Una formulación MIP para secuenciación óptima sobre máquinas en paralelo bajo incertidumbre
   - El modelo propuesto
   - Propiedades
   - Estudio experimental

Hipótesis

Se trata de asignar n trabajos a m máquinas que los procesarán según una ordenación específica.

Se desea minimizar el tiempo total de completación.

Las máquinas funcionan en paralelo y sin relación alguna en lo que respecta al tiempo necesario para procesar una tarea concreta.

Los trabajos están disponibles para su procesamiento en todo momento del periodo considerado.

No se admite la interrupción en el procesamiento de un trabajo una vez que éste da comienzo.

Hipótesis

Se trata de asignar n trabajos a m máquinas que los procesarán según una ordenación específica.

Se desea minimizar el tiempo total de completación.

Las máquinas funcionan en paralelo y sin relación alguna en lo que respecta al tiempo necesario para procesar una tarea concreta.

Los trabajos están disponibles para su procesamiento en todo momento del periodo considerado.

No se admite la interrupción en el procesamiento de un trabajo una vez que éste da comienzo.

Hipótesis

Se trata de asignar n trabajos a m máquinas que los procesarán según una ordenación específica.

Se desea minimizar el tiempo total de completación.

Las máquinas funcionan en paralelo y sin relación alguna en lo que respecta al tiempo necesario para procesar una tarea concreta.

Los trabajos están disponibles para su procesamiento en todo momento del periodo considerado.

No se admite la interrupción en el procesamiento de un trabajo una vez que éste da comienzo.

Hipótesis

Se trata de asignar n trabajos a m máquinas que los procesarán según una ordenación específica.

Se desea minimizar el tiempo total de completación.

Las máquinas funcionan en paralelo y sin relación alguna en lo que respecta al tiempo necesario para procesar una tarea concreta.

Los trabajos están disponibles para su procesamiento en todo momento del periodo considerado.

No se admite la interrupción en el procesamiento de un trabajo una vez que éste da comienzo.

Hipótesis

Se trata de asignar n trabajos a m máquinas que los procesarán según una ordenación específica.

Se desea minimizar el tiempo total de completación.

Las máquinas funcionan en paralelo y sin relación alguna en lo que respecta al tiempo necesario para procesar una tarea concreta.

Los trabajos están disponibles para su procesamiento en todo momento del periodo considerado.

No se admite la interrupción en el procesamiento de un trabajo una vez que éste da comienzo.

La versión determinística

$$
F(c) := \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{ijk} c_{ijk} x_{ijk} \\ \text{st:} & \\ & \sum_{jk} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in N, \\ & \sum_{i} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall j \in M, k \in K \\ & x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N, j \in M, k \in K, \end{array} \qquad (P_0)
$$

$x_{ijk} = 1$ si el trabajo i se procesa en la máquina j en la posición k, contando desde atrás

$c_{ijk} = kp_{ij}$ siendo p_{ij} el tiempo de procesamiento que requiere el trabajo i si es procesado por la máquina j.

La versión determinística

$$
\begin{array}{lll}
F(c) := & \min & \sum_{ijk} c_{ijk} x_{ijk} \\
& \text{st:} & \\
& & \sum_{jk} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in N, \\
& & \sum_{i} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall j \in M, k \in K \\
& & x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N, j \in M, k \in K,
\end{array}
\qquad (P_0)
$$

$x_{ijk} = 1$ si el trabajo i se procesa en la máquina j en la posición k, contando desde atrás

$c_{ijk} = kp_{ij}$ siendo p_{ij} el tiempo de procesamiento que requiere el trabajo i si es procesado por la máquina j.

La versión determinística

$$
F(c) := \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{ijk} c_{ijk} x_{ijk} \\ \text{st:} & \\ & \begin{array}{ll} \sum_{jk} x_{ijk} = 1, & \forall i \in N, \\ \sum_{i} x_{ijk} \leq 1, & \forall j \in M, k \in K \\ x_{ijk} \in \{0,1\}, & \forall i \in N, j \in M, k \in K, \end{array} \end{array} \qquad (P_0)
$$

$x_{ijk} = 1$ si el trabajo i se procesa en la máquina j en la posición k, contando desde atrás

$c_{ijk} = kp_{ij}$ siendo p_{ij} el tiempo de procesamiento que requiere el trabajo i si es procesado por la máquina j.

Modelo **minmax** regret

Tiempo de procesamiento del trabajo i en la máquina j, $p_{ij} \in [p_{ij}^-, p_{ij}^+]$

$$R^* = \min \max_{s \in S} \left[\sum_{ijk} k p_{ij}^s x_{ijk} - F(c(p^s)) \right]$$

st:

$$\begin{array}{ll} \sum_{jk} x_{ijk} = 1, & \forall i \in N, \\ \sum_{i} x_{ijk} \leq 1, & \forall j \in M, k \in K \\ x_{ijk} \in \{0,1\}, & \forall i \in N, j \in M, k \in K. \end{array} \quad (P)$$

En el problema (P_0) se podía relajar la condición de integridad de las variables, ahora no.

Modelo **minmax** regret

Tiempo de procesamiento del trabajo i en la máquina j, $p_{ij} \in [p_{ij}^{-}, p_{ij}^{+}]$

$$
\begin{array}{rll}
R^* = & \text{mín}\,\text{máx}_{s \in S} & \left[\sum_{ijk} k p_{ij}^{s} x_{ijk} - F(c(p^{s}))\right] \\
& \text{st:} & \\
& & \sum_{jk} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in N, \\
& & \sum_{i} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall j \in M, k \in K \\
& & x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N, j \in M, k \in K.
\end{array} \qquad (P)
$$

En el problema (P_0) se podía relajar la condición de integridad de las variables, ahora no.

Modelo **minmax** regret

Tiempo de procesamiento del trabajo i en la máquina j,
$p_{ij} \in [p_{ij}^-, p_{ij}^+]$

$$
\begin{array}{rll}
R^* = & \min \max_{s \in S} & \left[\sum_{ijk} k p_{ij}^s x_{ijk} - F(c(p^s)) \right] \\
& \text{st:} & \\
& & \sum_{jk} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in N, \\
& & \sum_{i} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall j \in M, k \in K \\
& & x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N, j \in M, k \in K.
\end{array} \qquad (P)
$$

En el problema (P_0) se podía relajar la condición de integridad de las variables, ahora no.

Complejidad

Lebedev, V., Averbakh, I. (2006)

El problema (P) sobre una sola máquina es NP-hard.

Aissi, H.,Bazgan, C.,Vanderpooten, D. (2005)

El problema de asignación minmax regret es strongly NP-hard.

Obviamente (P) es NP-hard pero para poder garantizar que lo es strongly es necesario encontrar una reducción polinomial del problema de asignación a (P).

Complejidad

Lebedev, V., Averbakh, I. (2006)

El problema (P) sobre una sola máquina es NP-hard.

Aissi, H.,Bazgan, C.,Vanderpooten, D. (2005)

El problema de asignación minmax regret es strongly NP-hard.

Obviamente (P) es NP-hard pero para poder garantizar que lo es strongly es necesario encontrar una reducción polinomial del problema de asignación a (P).

Complejidad

Lebedev, V., Averbakh, I. (2006)

El problema (P) sobre una sola máquina es NP-hard.

Aissi, H.,Bazgan, C.,Vanderpooten, D. (2005)

El problema de asignación minmax regret es strongly NP-hard.

Obviamente (P) es NP-hard pero para poder garantizar que lo es strongly es necesario encontrar una reducción polinomial del problema de asignación a (P).

Complejidad

Teorema

El problema de minmax regret de asignación admite una reducción polinomial al problema (P)

Formulación MIP

Montemanni, R. (2007)

Obtiene una formulación MIP para el problema (P) sobre una sola máquina.

Teorema

Para cualquier secuenciación $x \in X$ su máximo regret viene dado por

$$R(x) = \sum_{ijk} kp_{ij}^{+} x_{ijk} - \min_{y \in X} \sum_{ijk} \delta_{ijk}(x,p) y_{ijk} = \sum_{ijk} kp_{ij}^{+} x_{ijk} - F(\delta(x,p))$$

donde

$$\delta_{ijk}(x,p) = kp_{ij}^{-} + (p_{ij}^{+} - p_{ij}^{-}) \sum_{r \in K} \min\{r,k\} x_{ijr}, \forall i \in N, j \in M, k \in K.$$

El teorema anterior NO describe directamente cual es el peor escenario que se puede dar para una secuenciación factible, pero sí de forma indirecta:

1. Primero se obtiene una solución del problema de asignación que define $F(\delta(x,p))$, sea y una solución óptima.
2. Definir las variables $x_{ij} = k$ si $x_{ijk} = 1$ y lo mismo para y.
3. Si $x_{ij} \geq y_{ij}$ tomar $p^s_{ij} = p^+_{ij}$, en otro caso $p^s_{ij} = p^-_{ij}$.

Propiedad

Dada una secuenciación factible, su máximo regret y un escenario donde se alcanza se pueden determinar en $O((nm)^3)$.

El teorema anterior NO describe directamente cual es el peor escenario que se puede dar para una secuenciación factible, pero sí de forma indirecta:

1. Primero se obtiene una solución del problema de asignación que define $F(\delta(x,p))$, sea y una solución óptima.
2. Definir las variables $x_{ij} = k$ si $x_{ijk} = 1$ y lo mismo para y.
3. Si $x_{ij} \geq y_{ij}$ tomar $p^s_{ij} = p^+_{ij}$, en otro caso $p^s_{ij} = p^-_{ij}$.

Propiedad

Dada una secuenciación factible, su máximo regret y un escenario donde se alcanza se pueden determinar en $O((nm)^3)$.

El teorema anterior NO describe directamente cual es el peor escenario que se puede dar para una secuenciación factible, pero sí de forma indirecta:

1. Primero se obtiene una solución del problema de asignación que define $F(\delta(x, p))$, sea y una solución óptima.
2. Definir las variables $x_{ij} = k$ si $x_{ijk} = 1$ y lo mismo para y.
3. Si $x_{ij} \geq y_{ij}$ tomar $p^s_{ij} = p^+_{ij}$, en otro caso $p^s_{ij} = p^-_{ij}$.

Propiedad

Dada una secuenciación factible, su máximo regret y un escenario donde se alcanza se pueden determinar en $O((nm)^3)$.

El teorema anterior NO describe directamente cual es el peor escenario que se puede dar para una secuenciación factible, pero sí de forma indirecta:

1. Primero se obtiene una solución del problema de asignación que define $F(\delta(x,p))$, sea y una solución óptima.
2. Definir las variables $x_{ij} = k$ si $x_{ijk} = 1$ y lo mismo para y.
3. Si $x_{ij} \geq y_{ij}$ tomar $p^s_{ij} = p^+_{ij}$, en otro caso $p^s_{ij} = p^-_{ij}$.

Propiedad

Dada una secuenciación factible, su máximo regret y un escenario donde se alcanza se pueden determinar en $O((nm)^3)$.

El teorema anterior NO describe directamente cual es el peor escenario que se puede dar para una secuenciación factible, pero sí de forma indirecta:

1. Primero se obtiene una solución del problema de asignación que define $F(\delta(x, p))$, sea y una solución óptima.
2. Definir las variables $x_{ij} = k$ si $x_{ijk} = 1$ y lo mismo para y.
3. Si $x_{ij} \geq y_{ij}$ tomar $p^s_{ij} = p^+_{ij}$, en otro caso $p^s_{ij} = p^-_{ij}$.

Propiedad

Dada una secuenciación factible, su máximo regret y un escenario donde se alcanza se pueden determinar en $O((nm)^3)$.

Formulación MIP

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & \sum_{ijk} kp^{+}_{ij} x_{ijk} - \sum_i u_i + \sum_{jk} v_{jk} & \\
\text{st:} & & \\
 & \sum_{jk} x_{ijk} = 1, & \forall i, \\
 & \sum_i x_{ijk} \leq 1, & \forall j,k \\
 & u_i - v_{jk} - (p^{+}_{ij} - p^{-}_{ij}) \sum_r \text{mín}\{r,k\} x_{ijr} \leq kp^{-}_{ij}, & \forall i,j,k, \\
 & v_{jk} \geq 0, & \forall j,k, \\
 & x_{ijk} \in \{0,1\}, & \forall i,j,k \\
 & i \in N, j \in M, k \in K. &
\end{array}
\qquad (MIP)
$$

Kasperski, A. (2008)

La formulación MIP anterior extiende a la de para el problema de asignación minmax regret.

Pereira, J., Averbakh, I. (2011)

Realizan un estudio computacional de la formulación de Kasperski que respalda su utilidad práctica hasta para 100 asignaciones.

En su experimento computacional usan el escenario del punto medio para mejorar los tiempos de cómputo.

Kasperski, A. (2008)

La formulación MIP anterior extiende a la de para el problema de asignación minmax regret.

Pereira, J., Averbakh, I. (2011)

Realizan un estudio computacional de la formulación de Kasperski que respalda su utilidad práctica hasta para 100 asignaciones.

En su experimento computacional usan el escenario del punto medio para mejorar los tiempos de cómputo.

Kasperski, A. (2008)

La formulación MIP anterior extiende a la de para el problema de asignación minmax regret.

Pereira, J., Averbakh, I. (2011)

Realizan un estudio computacional de la formulación de Kasperski que respalda su utilidad práctica hasta para 100 asignaciones.

En su experimento computacional usan el escenario del punto medio para mejorar los tiempos de cómputo.

Teorema

Toda secuencia óptima bajo el escenario del punto medio define una 2-aproximación a la solución óptima de (P).

Test para la existencia de punto ideal

Se puede usar el resultado anterior para comprobar la existencia de una secuenciación *ideal* en tiempo $O((nm)^3)$. Esto extiende la condición necesaria y suficiente de Sotskov, Yu.N., Egorova, N.G., Lai, T.-C. (2009)

Teorema

Toda secuencia óptima bajo el escenario del punto medio define una 2-aproximación a la solución óptima de (P).

Test para la existencia de punto ideal

Se puede usar el resultado anterior para comprobar la existencia de una secuenciación *ideal* en tiempo $O((nm)^3)$. Esto extiende la condición necesaria y suficiente de Sotskov, Yu.N., Egorova, N.G., Lai, T.-C. (2009)

Estudio experimental

Se ha seguido el método de Pereira, J., Averbakh, I. (2011) para generar los casos resueltos del problema (P) de forma aleatoria. Se usa el modelo McGeoch para generar los intervalos de incertidumbre.

Se ha resuelto el problema de forma exacta y se ha comparado con la 2-aproximación obtenida mediante el escenario del punto medio.

Estudio experimental

Se ha seguido el método de Pereira, J., Averbakh, I. (2011) para generar los casos resueltos del problema (P) de forma aleatoria. Se usa el modelo McGeoch para generar los intervalos de incertidumbre.

Se ha resuelto el problema de forma exacta y se ha comparado con la 2-aproximación obtenida mediante el escenario del punto medio.

n	20			30			40		
	t_{exact}	t_{approx}	%error	t_{exact}	t_{approx}	%error	t_{exact}	t_{approx}	%error
$m = 2$	3.15	0.02	2.50 %	127.52	0.04	5.01 %	548.21(18)	0.06	16.25 %
$m = 5$	0.35	0.04	1.00 %	6.55	0.07	3.50 %	112.63(1)	0.13	4.74 %
$m = 10$	0.64	0.06	5.33 %	2.53	0.14	3.47 %	29.74	0.28	2.80 %

Cuadro : CPU time, in seconds, for the uncertainty factor $\rho = 0{,}1$.

n	20			30			40		
	t_{exact}	t_{approx}	$\%error$	t_{exact}	t_{approx}	$\%error$	t_{exact}	t_{approx}	$\%error$
$m = 2$	95.41(2)	0.02	6.95 %	575.09(18)	0.04	26.32 %	600.00(20)	0.08	32.72 %
$m = 5$	6.06	0.04	1.67 %	235.02(7)	0.07	6.75 %	571.78(18)	0.14	19.00 %
$m = 10$	3.34	0.07	3.97 %	170.072(3)	0.17	5.56 %	527.19(16)	0.28	13.11 %

Cuadro : CPU time, in seconds, for the uncertainty factor $\rho = 0{,}25$.

n	20			30			40		
	t_{exact}	t_{approx}	$\%error$	t_{exact}	t_{approx}	$\%error$	t_{exact}	t_{approx}	$\%error$
$m = 2$	540.85(17)	0.02	21.43 %	600.00(20)	0.03	31.99 %	600.00(20)	0.06	36.53 %
$m = 5$	191.86(4)	0.04	4.97 %	600.00(20)	0.10	25.57 %	600.00(20)	0.13	28.34 %
$m = 10$	27.14	0.07	1.86 %	498.05(16)	0.15	10.98 %	600.00(20)	0.29	20.80 %

Cuadro : CPU time, in seconds, for the uncertainty factor $\rho = 0{,}5$.