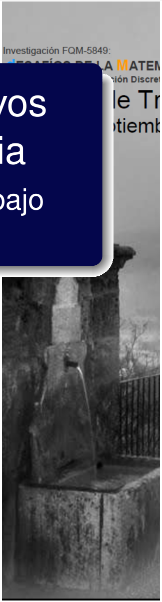
IV Encuentro de Trabajo. Proyecto: Nuevos desafíos de la Matemática Combinatoria

Un modelo de localización de medianas en árboles bajo incertidumbre en la ubicación de los clientes



Eduardo Conde

Departamento de Estadística e
Investigación Operativa
Universidad de Sevilla

PRIEGO DE CÓRDOBA, 27-29 septiembre 2013

1. Un modelo de localización de medianas en árboles bajo incertidumbre en la ubicación de los clientes
   - El modelo propuesto
   - Resolución del problema: Método naïve
   - Mejora del método

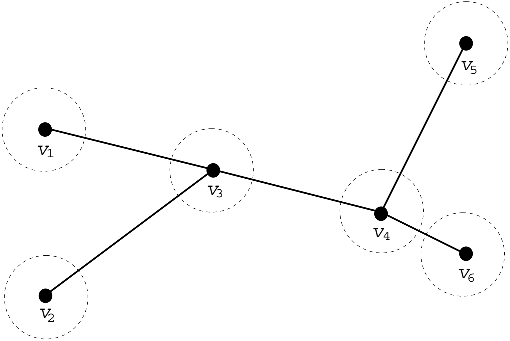


Figura : El árbol $T = (V, E)$ y un conjunto de entornos de incertidumbre para las localizaciones de los clientes

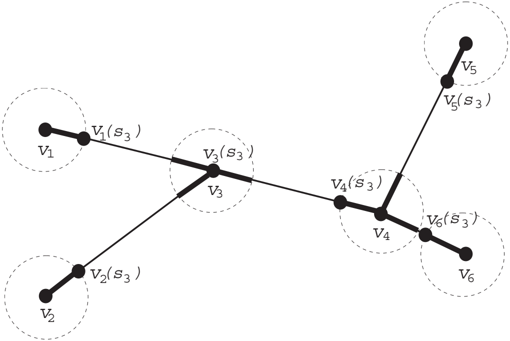


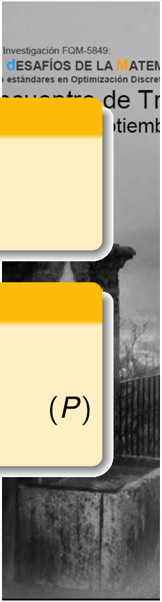
Figura : El árbol $T = (V, E)$ junto con la localización de los clientes bajo el escenario s_3

mediana, Hakimi & Goldman

$$\min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i)$$

minmax regret

$$\min_{x \in T} \max_{s \in S} \left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s)) - \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s)) \right]. \qquad (P)$$

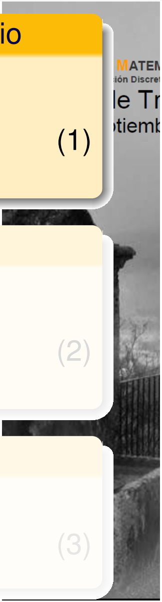


mediana, Hakimi & Goldman

$$\min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i)$$

minmax regret

$$\min_{x \in T} \max_{s \in S} \left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s)) - \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s)) \right]. \qquad (P)$$



regret al comparar con otra localización bajo un escenario

$$R(x,y,s) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(d(x, v_i(s)) - d(y, v_i(s)) \right) \tag{1}$$

regret bajo un escenario

$$R(x,s) = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s)) - \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s)) \right]. \tag{2}$$

regret absoluto

$$R(x) = \max_{s \in S} R(x,s) = R(x, y(x), s(x)), \tag{3}$$

regret al comparar con otra localización bajo un escenario

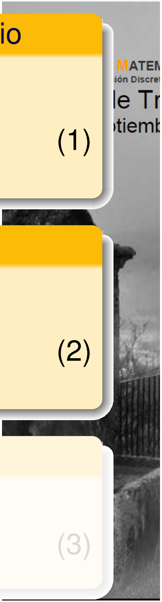
$$R(x, y, s) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(d(x, v_i(s)) - d(y, v_i(s))\right) \qquad (1)$$

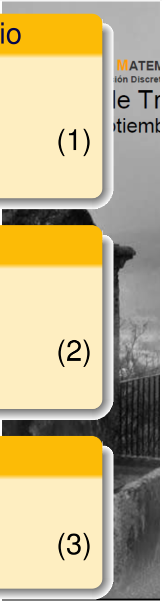
regret bajo un escenario

$$R(x, s) = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s)) - \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s))\right]. \qquad (2)$$

regret absoluto

$$R(x) = \max_{s \in S} R(x, s) = R(x, y(x), s(x)), \qquad (3)$$





regret al comparar con otra localización bajo un escenario

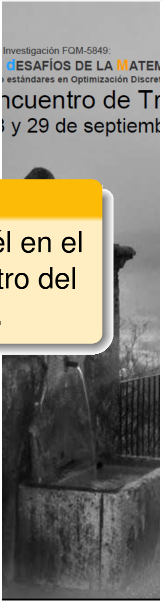
$$R(x,y,s)=\sum_{i=1}^{n} w_i\left(d(x,v_i(s))-d(y,v_i(s))\right) \tag{1}$$

regret bajo un escenario

$$R(x,s)=\left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x,v_i(s))-\min_{y\in T}\sum_{i=1}^{n} w_i d(y,v_i(s))\right]. \tag{2}$$

regret absoluto

$$R(x)=\max_{s\in S} R(x,s)=R(x,y(x),s(x)), \tag{3}$$



escenarios de atracción

Para cada cliente i el escenario de atracción, s_i, es aquél en el que la ubicación $v_j(s_i)$ es la más cercana al nodo v_i dentro del entorno de incertidumbre N_j de cada cliente $j = 1, \ldots, n$.

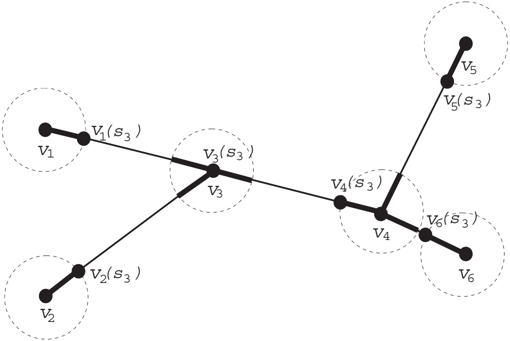
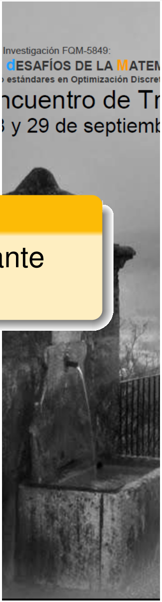
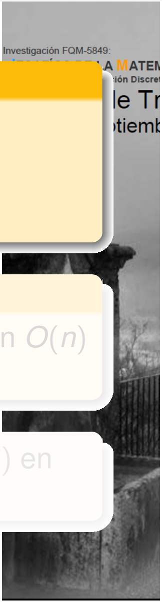


Figura : El árbol $T = (V, E)$ junto con la localización de los clientes bajo el escenario de atracción s_3



Escenarios dominantes

El conjunto S^* de los escenarios de atracción es dominante para el problema (P).



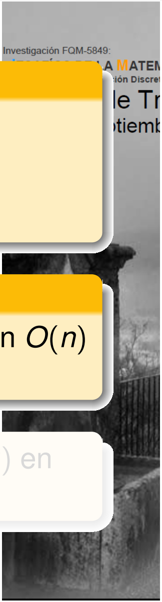
Hakimi

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} w_i d(y_j, v_i(s_j)) = \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s_j)).$$

Goldman, 1971

Usando el método Goldman podemos calcular cada z_j en $O(n)$ en total $O(n^2)$.

Una vez calculados los valores z_j, podemos evaluar $R(x)$ en $O(n)$.



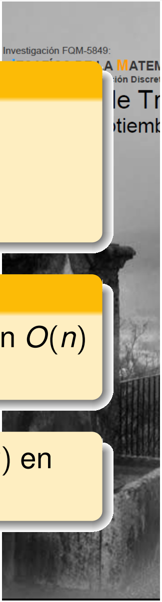
Hakimi

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} w_i d(y_j, v_i(s_j)) = \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s_j)).$$

Goldman, 1971

Usando el método Goldman podemos calcular cada z_j en $O(n)$ en total $O(n^2)$.

Una vez calculados los valores z_j, podemos evaluar $R(x)$ en $O(n)$.



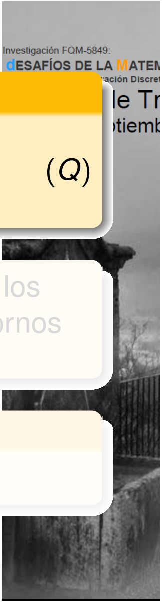
Hakimi

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} w_i d(y_j, v_i(s_j)) = \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s_j)).$$

Goldman, 1971

Usando el método Goldman podemos calcular cada z_j en $O(n)$ en total $O(n^2)$.

Una vez calculados los valores z_j, podemos evaluar $R(x)$ en $O(n)$.



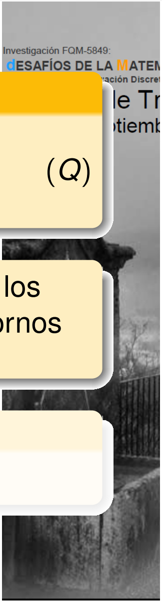
Reescribiendo el problema (P)

$$\min_{x \in T} \max_{j=1,2,\ldots,n} \left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s_j)) - z_j \right]. \qquad (Q)$$

Existe, al menos, una solución óptima de (Q) en uno de los nodos de T o en uno de los puntos extremos de los entornos de incertidumbre.

Primera cota de complejidad

El problema (P) se puede resolver en $O(n^2)$.



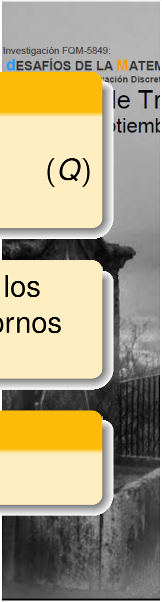
Reescribiendo el problema (P)

$$\min_{x \in T} \max_{j=1,2,\dots,n} \left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s_j)) - z_j \right]. \qquad (Q)$$

Existe, al menos, una solución óptima de (Q) en uno de los nodos de T o en uno de los puntos extremos de los entornos de incertidumbre.

Primera cota de complejidad

El problema (P) se puede resolver en $O(n^2)$.



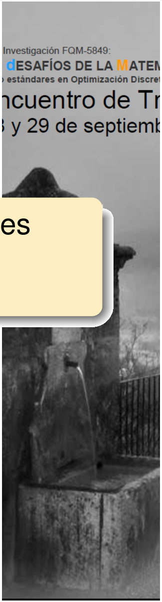
Reescribiendo el problema (P)

$$\min_{x \in T} \max_{j=1,2,\ldots,n} \left[\sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s_j)) - z_j \right]. \qquad (Q)$$

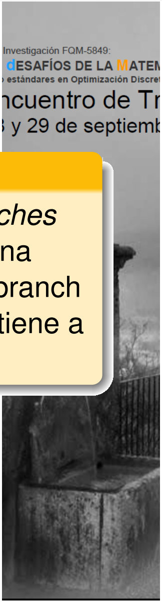
Existe, al menos, una solución óptima de (Q) en uno de los nodos de T o en uno de los puntos extremos de los entornos de incertidumbre.

Primera cota de complejidad

El problema (P) se puede resolver en $O(n^2)$.

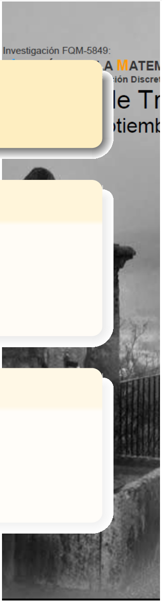


Para mejorar la complejidad del algoritmo de resolución es imprescindible evitar el cálculo de medianas bajo cada escenario de atracción.



x-branches O. Kariv and S.L. Hakimi, 1979

Dada una localización $x \in T$, definimos las *open x-branches* como las dos componentes conexas de $T \setminus \{x\}$. Dada una open x-branch B, el conjunto $B \cup \{x\}$ se denominará x-branch y para $x, y \in T$, $x \neq y$, $B(x, y)$ será la x-branch que contiene a la localización y.



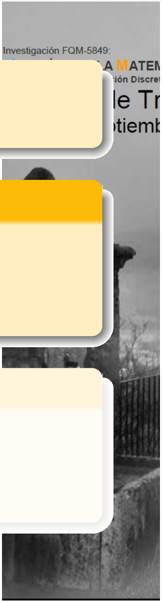
La función objetivo del problema (P) es convexa sobre cualquier camino de T.

$Z(s)$ está bien definida

$$Z(s) = \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s))$$

el regret bajo s es convexo por caminos

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s)) - Z(s)$$



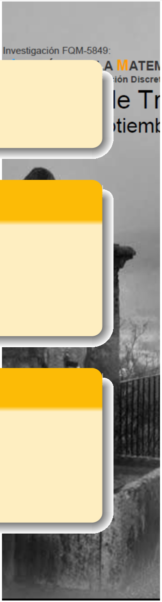
La función objetivo del problema (P) es convexa sobre cualquier camino de T.

$Z(s)$ está bien definida

$$Z(s) = \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s))$$

el regret bajo s es convexo por caminos

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s)) - Z(s)$$



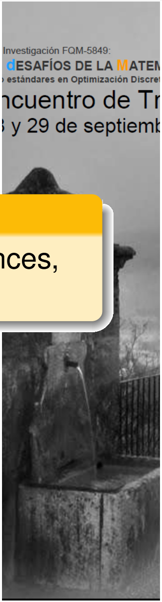
La función objetivo del problema (P) es convexa sobre cualquier camino de T.

$Z(s)$ está bien definida

$$Z(s) = \min_{y \in T} \sum_{i=1}^{n} w_i d(y, v_i(s))$$

el regret bajo s es convexo por caminos

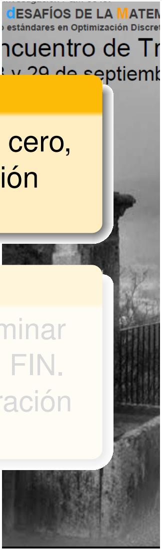
$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i d(x, v_i(s)) - Z(s)$$



Propiedad

Si dada una localización x, no es el óptimo de (P) entonces, hay una solución óptima en la x-branch $B(x, y(x))$.

Algoritmo mejorado



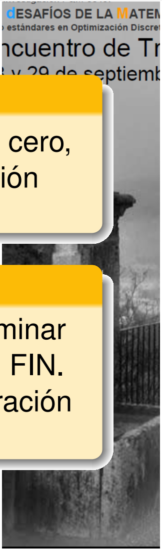
Inicialización

Determinar un vértice centroide x^0. Evaluar $R(x^0)$. Si es cero, FIN. En otro caso hacer $T_1 = B(x^0, y(x^0))$ e ir a la iteración $k = 1$.

Iteración $k = 1, 2, \ldots$

Si T_k coincide con un eje de T, FIN. En otro caso, determinar un vértice x^k centroide de T_k. Evaluar $R(x^k)$. Si es cero, FIN. En otro caso hacer $T_{k+1} = T_k \cap B(x^k, y(x^k))$ e ir a la iteración $k + 1$.

Algoritmo mejorado

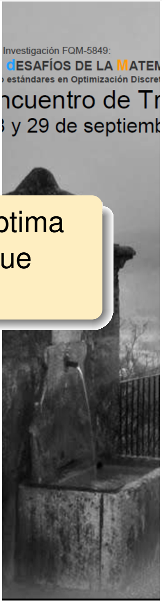


Inicialización

Determinar un vértice centroide x^0. Evaluar $R(x^0)$. Si es cero, FIN. En otro caso hacer $T_1 = B(x^0, y(x^0))$ e ir a la iteración $k = 1$.

Iteración $k = 1, 2, \ldots$

Si T_k coincide con un eje de T, FIN. En otro caso, determinar un vértice x^k centroide de T_k. Evaluar $R(x^k)$. Si es cero, FIN. En otro caso hacer $T_{k+1} = T_k \cap B(x^k, y(x^k))$ e ir a la iteración $k + 1$.

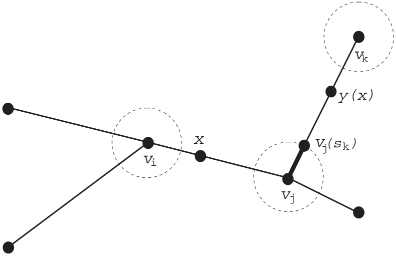


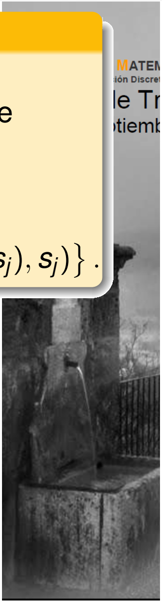
Tras la aplicación del algoritmo tenemos una mediana óptima bajo cada escenario posible ($R(x^*) = 0$) o un eje de T que contiene a la solución óptima.

Propiedad

Dada la localización $x \in T$, si su máximo regret $R(x)$ se alcanza en $R(x, y(x), s(x))$, siendo $y(x) \in (v_i, v_j) \in E$, se verifica

$$R(x, y(x), s(x)) = R_{ij}(x) =$$
$$= \max\left\{R(x, v_i, s_i), R(x, v_j, s_j), R(x, v_j(s_i), s_i), R(x, v_i(s_j), s_j)\right\}.$$



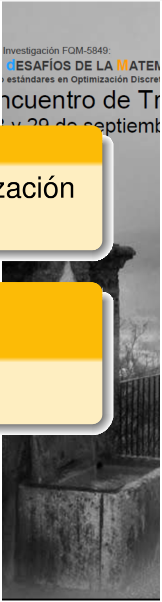


Teorema

La función $R(x)$ se puede evaluar sobre cualquier localización $x \in T$ en tiempo lineal $O(n)$.

Complejidad de cálculo de la mediana minmax regret en árboles bajo localización incierta de los clientes

$$O(n \log n)$$



Teorema

La función $R(x)$ se puede evaluar sobre cualquier localización $x \in T$ en tiempo lineal $O(n)$.

Complejidad de cálculo de la mediana minmax regret en árboles bajo localización incierta de los clientes

$$O(n \log n)$$