Restricciones de asignación al servicio más cercano en problemas de localización discreta

Inmaculada Espejo[1]
Alfredo Marín[2]
Antonio Rodríguez-Chía[1]

[1]Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Cádiz
[2]Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Murcia

Seminario del proyecto "Nuevos Desafíos de la Matemática Combinatoria"
Sevilla

El problema base

- INPUT
  - $A = \{1, \ldots, n\}$ puntos (clientes y plantas potenciales)
  - $d_{ij} \geq 0$ distancias entre puntos
  - $c_{ij} \geq 0$ costes de asignación
  - $p \geq 1$ número fijo de plantas
- VARIABLES
  - y_j, $j \in A$, $= 1$ si se abre una planta en el punto j,
  - x_{ij}, $i, j \in A$, $= 1$ si el cliente i se asigna a la planta j

El problema base

$$
\begin{array}{llll}
\min & cx + c^y y + c^z z & & \\
\text{s.a} & \sum_{j \in A} x_{ij} = 1 & \forall i \in A & (1) \\
& x_{ij} \leq y_j & \forall i, j \in A & (2) \\
& \sum_{j \in A} y_j = p & & (3) \\
& F_x x + F_y y + F_z z \leq g & & \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall i, j \in A & \\
& 0 \leq y_j \leq 1 & \forall j \in A & (4) \\
& y_j \in \mathbb{Z}, & \forall j \in A & (5) \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}, & \forall i, j \in A & (6) \\
& z_k \in \mathbb{Z} & \forall k \in K' \subseteq K &
\end{array}
$$

El problema de la p-mediana

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i\in A}\sum_{j\in A} d_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.a} & \sum_{j\in A} x_{ij} = 1 & \forall i \in A \\
 & x_{ij} \leq y_j & \forall i,j \in A \\
 & \sum_{j\in A} y_j = p & \\
 & x_{ij} \geq 0 & \forall i,j \in A \\
 & 0 \leq y_j \leq 1 & \forall j \in A \\
 & x_{ij}, y_j \in \mathbb{Z} & \forall i,j \in A
\end{array}
$$

Debido a la forma de la función objetivo, cada cliente es asignado a la planta más cercana (a menor distancia) en una solución óptima.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i\in A}\sum_{j\in A} d_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.a} & \sum_{j\in A} x_{ij} = 1 & \forall i \in A \\
 & x_{ij} \leq y_j & \forall i,j \in A \\
 & \sum_{j\in A} y_j = p & \\
 & x_{ij} \geq 0 & \forall i,j \in A \\
 & 0 \leq y_j \leq 1 & \forall j \in A \\
 & x_{ij}, y_j \in \mathbb{Z} & \forall i,j \in A
\end{array}
$$

Debido a la forma de la función objetivo, cada cliente es asignado a la planta más cercana (a menor distancia) en una solución óptima.

Consideremos el siguiente ejemplo: $d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{lcl}
\min & x_{12} + 100x_{13} + x_{21} + 100x_{23} + 2x_{31} + x_{32} & \\
\text{s.a} & \sum_{j\in A} x_{ij} = 1 & \forall i \in A \\
& x_{ij} \leq y_j & \forall i,j \in A \\
& \sum_{j\in A} y_j = 2 & \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall i,j \in A \\
& 0 \leq y_j \leq 1 & \forall j \in A \\
& x_{ij}, y_j \in \mathbb{Z} & \forall i,j \in A
\end{array}
$$

con solución óptima $y = (1,1,0)$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aunque el cliente 3 está a menor distancia de la planta 1, es asignado a la planta 2 por tener un coste menor.

Existen muchos modelos de localización discreta en los que hay que forzar mediante restricciones adicionales que los clientes sean asignados a la planta más cercana. Algunos de ellos quedan reflejados en las transparencias siguientes.

Caso general

Consideremos el siguiente ejemplo: $d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcr} \min & x_{12} + 100x_{13} + x_{21} + 100x_{23} + 2x_{31} + x_{32} & \\ \text{s.a} & \sum_{j\in A} x_{ij} = 1 & \forall i \in A \\ & x_{ij} \leq y_j & \forall i,j \in A \\ & \sum_{j\in A} y_j = 2 & \\ & x_{ij} \geq 0 & \forall i,j \in A \\ & 0 \leq y_j \leq 1 & \forall j \in A \\ & x_{ij}, y_j \in \mathbb{Z} & \forall i,j \in A \end{array}$$

con solución óptima $y = (1,1,0)$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aunque el cliente 3 está a menor distancia de la planta 1, es asignado a la planta 2 por tener un coste menor.

Existen muchos modelos de localización discreta en los que hay que forzar mediante restricciones adicionales que los clientes sean asignados a la planta más cercana. Algunos de ellos quedan reflejados en las transparencias siguientes.

Restricciones CA en la literatura

Rojeski y ReVelle (1970)
(problema con restricciones de presupuesto)

$$x_{ij} + \sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} y_a \geq y_j \quad \forall i, j \in A. \qquad \mathcal{RR}$$

Como sólo funcionan en ausencia de empates, supondremos en lo sucesivo que para un cliente fijo $i \in A$, las distancias d_{ij}, $j \in A$, son todas distintas.

Wagner y Falkson (1975)
(servicio a todas las llegadas)

$$\sum_{a:\ d_{ia}>d_{ij}} x_{ia} + y_j \leq 1 \quad \forall i, j \in A. \qquad \mathcal{WF}$$

Restricciones CA en la literatura

Church y Cohon (1976)
(ubicación de servidores de energía)

$$\sum_{a:\ d_{ia}\leq d_{ij}} x_{ia} \geq y_j \quad \forall i,j \in A. \qquad \mathcal{CC}$$

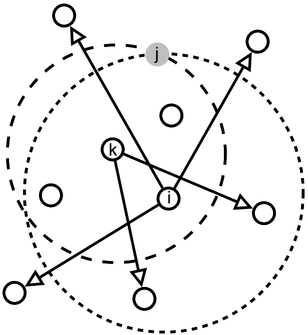
Restricciones CA en la literatura

Dobson y Karmarkar (1987)
(localización competitiva)

$$x_{ij} + y_a \leq 1 \quad \forall i, j, a \in A: \quad d_{ia} < d_{ij}. \qquad \mathcal{DK}$$

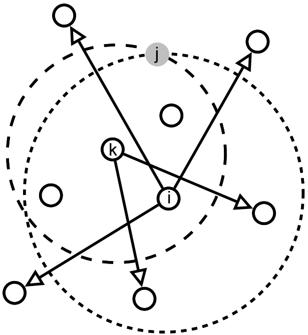
Cánovas, García, Labbé y Marín (2007)
(localización con preferencias)

$$\sum_{a:\ d_{ia}>d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia}\le d_{ij}, d_{ka}>d_{kj}} x_{ka} + y_j \le 1 \quad \forall i,j,k \in A. \qquad \mathcal{CGLM}$$



Cánovas, García, Labbé y Marín (2007)
(localización con preferencias)

$$\sum_{a:\ d_{ia}>d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia}\leq d_{ij}, d_{ka}>d_{kj}} x_{ka} + y_j \leq 1 \quad \forall i,j,k \in A. \qquad \mathcal{CGLM}$$



Restricciones CA en la literatura

Belotti, Labbé, Maffioli y Ndiaye (2007)
(localización repulsiva)
Introducidas como desigualdades válidas.

$$p \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} x_{ia} \leq \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} y_a \quad \forall i, j \in A. \qquad \mathcal{BLMN}$$

Restricciones CA en la literatura

Berman, Drezner, Tamir y Wesolowsky (2009)
(localización equitativa)

$$\sum_{a \in A} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij}) y_j \leq M \quad \forall i, j \in A. \qquad \mathcal{BDTW}$$

M es una cantidad grande

Marín (2010)
(localización con equilibrio entre plantas)

$$q_{ij} \sum_{a:\ d_{ia} \geq d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} y_a \leq q_{ij}, \quad \forall i, j \in A. \qquad \mathcal{M}$$

$q_{ij} := \min\{p, |\theta_{ij}|\}$ y $\theta_{ij} := \{a : \ d_{ia} < d_{ij}\}$

Las restricciones $\mathcal{M}$ pueden adaptarse al caso en que no hay un número fijo de plantas haciendo

$$|\theta_{ij}| \sum_{a:\ d_{ia} \geq d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} y_a \leq |\theta_{ij}|, \quad \forall i, j \in A. \qquad \mathcal{M}'$$

Decimos que un conjunto de restricciones $A_x x + A_y y \leq b$ domina a otro conjunto $A'_x x + A'_y y \leq b'$ si

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{R}_+^n : \ A_x x + A_y y \leq b, (1), (2), (3), (4)\} \subseteq$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{R}_+^n : \ A'_x x + A'_y y \leq b', (1), (2), (3), (4)\}.$$

Si se dominan mutuamente, decimos que son equivalentes.

Relaciones entre restricciones

Decimos que un conjunto de restricciones $A_x x + A_y y \leq b$ domina a otro conjunto $A'_x x + A'_y y \leq b'$ si

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{R}_+^n : \ A_x x + A_y y \leq b, (1), (2), (3), (4)\} \subseteq$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{R}_+^n : \ A'_x x + A'_y y \leq b', (1), (2), (3), (4)\}.$$

Si se dominan mutuamente, decimos que son equivalentes.

Proposición

$\mathcal{WF}$ y $\mathcal{CC}$ son equivalentes

$$1 - \sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} x_{ia} + y_j \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} x_{ia} \geq y_j$$

Proposición

$\mathcal{WF}$ y $\mathcal{CC}$ son equivalentes

$$1 - \sum_{a:\ d_{ia} \le d_{ij}} x_{ia} + y_j \le 1 \Leftrightarrow \sum_{a:\ d_{ia} \le d_{ij}} x_{ia} \ge y_j$$

Proposición

$\mathcal{WF}$ dominan a $\mathcal{RR}$

Reescribiendo $\mathcal{WF}$ como

$$1 - \sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} x_{ia} + y_j \leq 1 \Leftrightarrow x_{ij} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} x_{ia} \geq y_j \Rightarrow$$

$$x_{ij} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} y_a \geq y_j$$

Proposición

$\mathcal{WF}$ dominan a $\mathcal{RR}$

Reescribiendo $\mathcal{WF}$ como

$$1 - \sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} x_{ia} + y_j \leq 1 \Leftrightarrow x_{ij} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} x_{ia} \geq y_j \Rightarrow$$

$$x_{ij} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} y_a \geq y_j$$

Proposición

$\mathcal{WF}$ dominan a $\mathcal{DK}$

Dados valores i, j, a: $d_{ia} < d_{ij}$, la restricción $\mathcal{DK}$

$$x_{ij} + y_a \leq 1$$

está dominada por

$$\sum_{k:\ d_{ik} < d_{ij}} x_{ik} + x_{ij} + y_a \leq 1$$

Proposición

$\mathcal{WF}$ dominan a $\mathcal{DK}$

Dados valores i, j, a: $d_{ia} < d_{ij}$, la restricción $\mathcal{DK}$

$$x_{ij} + y_a \leq 1$$

está dominada por

$$\sum_{k:\ d_{ik} < d_{ij}} x_{ik} + x_{ij} + y_a \leq 1$$

Proposición

$\mathcal{DK}$ dominan a $\mathcal{BDTW}$

Veamos que para $i, j \in A$, $x_{ia} + y_j \leq 1 \quad \forall a: \ d_{ia} > d_{ij}$ dominan a $\sum_{a \in A} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij}) y_j \leq M$. Multiplicando por d_{ia} y sumando

$$\sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + \Big(\sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} d_{ia} \Big) y_j \leq \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} d_{ia}.$$

Añadiendo a ambos términos $\sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij} - \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} d_{ia}) y_j$,

$$\sum_{a \in A} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij}) y_j \leq \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} d_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij} - \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} d_{ia}) y_j.$$

Como $y_j \leq 1$, el lado derecho es menor o igual que

$$\sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + M - d_{ij}$$

y por (1), que implica $\sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} \leq d_{ij}$, el resultado sigue.

Proposición

$\mathcal{DK}$ *dominan a* $\mathcal{BDTW}$

Veamos que para $i, j \in A$, $x_{ia} + y_j \leq 1 \;\; \forall a: \;\; d_{ia} > d_{ij}$ dominan a $\sum_{a \in A} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij}) y_j \leq M$. Multiplicando por d_{ia} y sumando

$$\sum_{a:\; d_{ia} > d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + \Big(\sum_{a:\; d_{ia} > d_{ij}} d_{ia} \Big) y_j \leq \sum_{a:\; d_{ia} > d_{ij}} d_{ia}.$$

Añadiendo a ambos términos $\sum_{a:\; d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij} - \sum_{a:\; d_{ia} > d_{ij}} d_{ia}) y_j$,

$$\sum_{a \in A} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij}) y_j \leq \sum_{a:\; d_{ia} > d_{ij}} d_{ia} + \sum_{a:\; d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + (M - d_{ij} - \sum_{a:\; d_{ia} > d_{ij}} d_{ia}) y_j.$$

Como $y_j \leq 1$, el lado derecho es menor o igual que

$$\sum_{a:\; d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} + M - d_{ij}$$

y por (1), que implica $\sum_{a:\; d_{ia} \leq d_{ij}} d_{ia} x_{ia} \leq d_{ij}$, el resultado sigue.

Proposición

$\mathcal{DK}$ *dominan a* $\mathcal{BDTW}$

Veamos que para $i, j \in A$, $x_{ia} + y_j \leq 1 \;\; \forall a: \;\; d_{ia} > d_{ij}$ dominan a $\sum_{a\in A} d_{ia}x_{ia} + (M - d_{ij})y_j \leq M$. Multiplicando por d_{ia} y sumando

$$\sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia}x_{ia} + (\sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia})y_j \leq \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia}.$$

Añadiendo a ambos términos
$\sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia} + (M - d_{ij} - \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia})y_j$,

$$\sum_{a\in A} d_{ia}x_{ia}+(M-d_{ij})y_j \leq \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia}+ \sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia}+(M-d_{ij}- \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia})y_j.$$

Como $y_j \leq 1$, el lado derecho es menor o igual que

$$\sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia} + M - d_{ij}$$

y por (1), que implica $\sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia} \leq d_{ij}$, el resultado sigue.

Proposición

$\mathcal{DK}$ *dominan a* $\mathcal{BDTW}$

Veamos que para $i,j \in A$, $x_{ia} + y_j \leq 1 \;\; \forall a: \;\; d_{ia} > d_{ij}$ dominan a $\sum_{a\in A} d_{ia}x_{ia} + (M - d_{ij})y_j \leq M$. Multiplicando por d_{ia} y sumando

$$\sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia}x_{ia} + (\sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia})y_j \leq \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia}.$$

Añadiendo a ambos términos
$\sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia} + (M - d_{ij} - \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia})y_j$,

$$\sum_{a\in A} d_{ia}x_{ia} + (M - d_{ij})y_j \leq \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia} + \sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia} + (M - d_{ij} - \sum_{a:\;\; d_{ia}>d_{ij}} d_{ia})y_j.$$

Como $y_j \leq 1$, el lado derecho es menor o igual que

$$\sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia} + M - d_{ij}$$

y por (1), que implica $\sum_{a:\;\; d_{ia}\leq d_{ij}} d_{ia}x_{ia} \leq d_{ij}$, el resultado sigue.

Proposición

$\mathcal{WF}$ dominan a $\mathcal{M}'$

Fijando $i, j \in A$ y sumando las restricciones $\mathcal{WF}$ siguientes

$$\sum_{b:\ d_{ib} > d_{ia}} x_{ib} + y_a \leq 1 \qquad \forall a : d_{ia} < d_{ij}.$$

tenemos

$$\sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} \sum_{b:\ d_{ib} > d_{ia}} x_{ib} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} y_a \leq |\{a \in A :\ d_{ia} < d_{ij}\}| \Leftrightarrow$$

$$\sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} |\theta_{ia}| x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia} \geq d_{ij}} |\theta_{ij}| x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} y_a \leq |\theta_{ij}|.$$

Proposición

$\mathcal{WF}$ dominan a $\mathcal{M}'$

Fijando $i, j \in A$ y sumando las restricciones $\mathcal{WF}$ siguientes

$$\sum_{b:\ d_{ib}>d_{ia}} x_{ib} + y_a \leq 1 \qquad \forall a : d_{ia} < d_{ij}.$$

tenemos

$$\sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} \ \sum_{b:\ d_{ib}>d_{ia}} x_{ib} + \sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} y_a \leq |\{a \in A: \ d_{ia} < d_{ij}\}| \Leftrightarrow$$

$$\sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} |\theta_{ia}| x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia}\geq d_{ij}} |\theta_{ij}| x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} y_a \leq |\theta_{ij}|.$$

Proposición

$\mathcal{CGLM}$ *dominan a* $\mathcal{WF}$

Cada coeficiente en $\mathcal{CGLM}$ es mayor o igual que el correspondiente coeficiente en $\mathcal{WF}$.

Proposición

$\mathcal{CGLM}$ dominan a $\mathcal{WF}$

Cada coeficiente en $\mathcal{CGLM}$ es mayor o igual que el correspondiente coeficiente en $\mathcal{WF}$.

Proposición

$\mathcal{M}$ dominan a $\mathcal{BLMN}$

Usando (3), $\mathcal{BLMN}$ se reescriben

$$p \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} x_{ia} \leq p - \sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} y_a \Leftrightarrow$$

$$q_{ij} \sum_{a:\ d_{ia} > d_{ij}} x_{ia} + \frac{q_{ij}}{p} \sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij}} y_a \leq q_{ij}.$$

En el caso $p \leq |\theta_{ij}|$, esto coincide con $\mathcal{M}$ pero en el caso $p > |\theta_{ij}|$, los coeficientes de y en $\mathcal{M}$ son estrictamente mayores.

Proposición

$\mathcal{M}$ dominan a $\mathcal{BLMN}$

Usando (3), $\mathcal{BLMN}$ se reescriben

$$p \sum_{a:\ d_{ia}>d_{ij}} x_{ia} \leq p - \sum_{a:\ d_{ia}\leq d_{ij}} y_a \Leftrightarrow$$

$$q_{ij} \sum_{a:\ d_{ia}>d_{ij}} x_{ia} + \frac{q_{ij}}{p} \sum_{a:\ d_{ia}\leq d_{ij}} y_a \leq q_{ij}.$$

En el caso $p \leq |\theta_{ij}|$, esto coincide con $\mathcal{M}$ pero en el caso $p > |\theta_{ij}|$, los coeficientes de y en $\mathcal{M}$ son estrictamente mayores.

Ejemplo

$n = 3,\ p = 2,\ (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$

$$\min x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 2x_{23} + 3x_{31} + 2x_{32}$$

$$s.a\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{BDTW},\ 0 \le y_j \le 1\ \forall j,\ x_{ij} \ge 0\ \forall i,j.$$

Solución óptima: $(y_j^*) = (1/2, 1/2, 1),\ (x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Viola la restricción $\mathcal{DK}$ con $i = 1,\ j = 2,\ a = 3$ cuyo lado izquierdo es $x_{12}^* + y_3^* = 1.5 > 1$.

Por tanto las restricciones $\mathcal{BDTW}$ no dominan a $\mathcal{DK}$.

Ejemplo

$n = 3,\ p = 2,\ (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$

$$\min x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 2x_{23} + 3x_{31} + 2x_{32}$$

$$s.a\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{BDTW},\ 0 \leq y_j \leq 1\ \forall j,\ x_{ij} \geq 0\ \forall i,j.$$

Solución óptima: $(y_j^*) = (1/2, 1/2, 1)$, $(x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Viola la restricción $\mathcal{DK}$ con $i = 1$, $j = 2$, $a = 3$ cuyo lado izquierdo es $x_{12}^* + y_3^* = 1.5 > 1$.
Por tanto las restricciones $\mathcal{BDTW}$ no dominan a $\mathcal{DK}$.

Relaciones entre restricciones

	(d_{ij})	(c_{ij})	p	$\mathcal{CG}$ $\mathcal{LM}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{BL}$ $\mathcal{MN}$	$\mathcal{WF}$, $\mathcal{CC}$ $ij(k)$	$\mathcal{M}'$	$\mathcal{DK}$	$\mathcal{RR}$	$\mathcal{BDTW}$
$\mathcal{CG}$ $\mathcal{LM}$	$\begin{matrix}0&5&1&4\\5&0&6&3\\1&6&0&2\\4&3&2&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&3&4&5\\3&0&6&1\\4&6&0&2\\5&1&2&0\end{matrix}$	2	-	12	14	D	D	D	D	D
$\mathcal{M}$	$\begin{matrix}0&2&1&3\\2&0&5&4\\1&5&0&6\\3&4&6&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&2&4&3\\2&0&5&6\\4&5&0&1\\3&6&1&0\end{matrix}$	2	412	-	D	41	D	431	41	41
$\mathcal{BL}$ $\mathcal{MN}$	$\begin{matrix}0&2&4&5\\2&0&6&1\\4&6&0&3\\5&1&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&2&5&3\\2&0&1&4\\5&1&0&6\\3&4&6&0\end{matrix}$	3	241	21	-	24	21	234	24	24
$\mathcal{WF}$, $\mathcal{CC}$	$\begin{matrix}0&3&6&2\\3&0&5&1\\6&5&0&4\\2&1&4&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&6&5&4\\6&0&2&3\\5&2&0&1\\4&3&1&0\end{matrix}$	2	211	23	21	-	D	D	D	D
$\mathcal{M}'$	$\begin{matrix}0&1&2&6\\1&0&5&3\\2&5&0&4\\6&3&4&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&4&3&2\\4&0&5&1\\3&5&0&6\\2&1&6&0\end{matrix}$	2	132	14	13	13	-	143	13	13
$\mathcal{DK}$	$\begin{matrix}0&5&3&2\\5&0&4&6\\3&4&0&1\\2&6&1&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&3&4\\1&0&2&5\\3&2&0&6\\4&5&6&0\end{matrix}$	2	132	12	13	34	31	-	34	D
$\mathcal{RR}$	$\begin{matrix}0&5&2&1\\5&0&3&4\\2&3&0&6\\1&4&6&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&5&3\\1&0&4&2\\5&4&0&6\\3&2&6&0\end{matrix}$	3	132	12	13	13	12	123	-	13
$\mathcal{BDTW}$	$\begin{matrix}0&2&1\\2&0&3\\1&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&3\\1&0&2\\3&2&0\end{matrix}$	2	131	12	13	13	12	123	13	-

Un nuevo conjunto de restricciones

$$\sum_{\substack{a:\ d_{ia} < d_{ij} \\ |\theta_{ij}| - |\theta_{ia}| \leq p}} (|\theta_{ia}| + (p - |\theta_{ij}|)^-)x_{ia} +$$

$$q_{ij} \sum_{a:\ d_{ia} \geq d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij}} y_a \leq q_{ij}, \quad \forall i, j. \qquad \mathcal{EMR}$$

$z^- := \min\{0, z\}$

Clasificación de las nuevas restricciones

Proposición

$\mathcal{EMR}$ dominan a $\mathcal{M}$

Cada coeficiente en $\mathcal{EMR}$ es mayor o igual que el correspondiente coeficiente en $\mathcal{M}$.

Clasificación de las nuevas restricciones

Proposición

$\mathcal{EMR}$ dominan a $\mathcal{M}$

Cada coeficiente en $\mathcal{EMR}$ es mayor o igual que el correspondiente coeficiente en $\mathcal{M}$.

Ejemplo

$$n = 5,\ p = 3,\ (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 & 10 \\ 5 & 0 & 9 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\min 4x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 6x_{15} + 4x_{21} + 2x_{23} + x_{24} + 5x_{25} + 10x_{31} + 2x_{32} + 3x_{34} + 9x_{35} +$$

$$7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} + 8x_{45} + 6x_{51} + 5x_{52} + 9x_{53} + 8x_{54}$$

$$s.t.\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{EMR},\ 0 \le y_j \le 1\ \forall j,\ x_{ij} \ge 0\ \forall i, j.$$

Solución óptima: $(y_j^*) = (1/2, 3/4, 1/2, 1/4, 0)$, $(x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{RR}$ en (x^*, y^*) vale $2x_{35}^* + y_3^* + y_4^* = 3/4$ y el lado derecho $y_5^* = 1$.

Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{BDTW}$ en (x^*, y^*) vale $10/4 + (M-2)y_5^* = 1/2 + M$.

Por tanto $\mathcal{EMR}$ no domina $\mathcal{RR}$ ni $\mathcal{BDTW}$.

Ejemplo

$$n = 5,\ p = 3,\ (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 & 10 \\ 5 & 0 & 9 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\min 4x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 6x_{15} + 4x_{21} + 2x_{23} + x_{24} + 5x_{25} + 10x_{31} + 2x_{32} + 3x_{34} + 9x_{35} +$$

$$7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} + 8x_{45} + 6x_{51} + 5x_{52} + 9x_{53} + 8x_{54}$$

$$s.t.\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{EMR},\ 0 \le y_j \le 1\ \forall j,\ x_{ij} \ge 0\ \forall i,j.$$

Solución óptima: $(y_j^*) = (1/2, 3/4, 1/2, 1/4, 0)$, $(x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{RR}$ en (x^*, y^*) vale $2x_{35}^* + y_3^* + y_4^* = 3/4$ y el lado derecho $y_5^* = 1$.
Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{BDTW}$ en (x^*, y^*) vale $10/4 + (M-2)y_5^* = 1/2 + M$.
Por tanto $\mathcal{EMR}$ no domina $\mathcal{RR}$ ni $\mathcal{BDTW}$.

Ejemplo

$$n = 5,\ p = 3,\ (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 & 10 \\ 5 & 0 & 9 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\min 4x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 6x_{15} + 4x_{21} + 2x_{23} + x_{24} + 5x_{25} + 10x_{31} + 2x_{32} + 3x_{34} + 9x_{35} +$$

$$7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} + 8x_{45} + 6x_{51} + 5x_{52} + 9x_{53} + 8x_{54}$$

$$s.t.\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{EMR},\ 0 \leq y_j \leq 1\ \forall j,\ x_{ij} \geq 0\ \forall i, j.$$

Solución óptima: $(y_j^*) = (1/2, 3/4, 1/2, 1/4, 0)$, $(x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{RR}$ en (x^*, y^*) vale $2x_{35}^* + y_3^* + y_4^* = 3/4$ y el lado derecho $y_5^* = 1$.

Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{BDTW}$ en (x^*, y^*) vale $10/4 + (M-2)y_5^* = 1/2 + M$.

Por tanto $\mathcal{EMR}$ no domina $\mathcal{RR}$ ni $\mathcal{BDTW}$.

Ejemplo

$$n = 5,\ p = 3,\ (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 & 10 \\ 5 & 0 & 9 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\min 4x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 6x_{15} + 4x_{21} + 2x_{23} + x_{24} + 5x_{25} + 10x_{31} + 2x_{32} + 3x_{34} + 9x_{35} +$$

$$7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} + 8x_{45} + 6x_{51} + 5x_{52} + 9x_{53} + 8x_{54}$$

$$s.t.\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{EMR},\ 0 \leq y_j \leq 1\ \forall j,\ x_{ij} \geq 0\ \forall i, j.$$

Solución óptima: $(y_j^*) = (1/2, 3/4, 1/2, 1/4, 0)$, $(x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{RR}$ en (x^*, y^*) vale $2x_{35}^* + y_3^* + y_4^* = 3/4$ y el lado derecho $y_5^* = 1$.
Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{BDTW}$ en (x^*, y^*) vale $10/4 + (M-2)y_5^* = 1/2 + M$.

Por tanto $\mathcal{EMR}$ no domina $\mathcal{RR}$ ni $\mathcal{BDTW}$.

Ejemplo

$$n = 5,\ p = 3,\ (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 & 10 \\ 5 & 0 & 9 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\min 4x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 6x_{15} + 4x_{21} + 2x_{23} + x_{24} + 5x_{25} + 10x_{31} + 2x_{32} + 3x_{34} + 9x_{35} +$$

$$7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} + 8x_{45} + 6x_{51} + 5x_{52} + 9x_{53} + 8x_{54}$$

$$s.t.\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{EMR},\ 0 \leq y_j \leq 1\ \forall j,\ x_{ij} \geq 0\ \forall i,j.$$

Solución óptima: $(y_j^*) = (1/2, 3/4, 1/2, 1/4, 0)$, $(x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{RR}$ en (x^*, y^*) vale $2x_{35}^* + y_3^* + y_4^* = 3/4$ y el lado derecho $y_5^* = 1$.
Cuando $i = 3$ y $j = 5$, el lado izquierdo de $\mathcal{BDTW}$ en (x^*, y^*) vale $10/4 + (M - 2)y_5^* = 1/2 + M$.
Por tanto $\mathcal{EMR}$ no domina $\mathcal{RR}$ ni $\mathcal{BDTW}$.

Clasificación de las nuevas restricciones

Con los ejemplos dados en la tabla puede comprobarse también que $\mathcal{M}$ no domina a $\mathcal{EMR}$ y que $\mathcal{CGLM}$ no domina a $\mathcal{EMR}$. Estos ejemplos, junto con las relaciones establecidas anteriormente, prueban que $\mathcal{EMR}$ dominan únicamente a $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{BLMN}$ y no son dominadas por ningún conjunto de restricciones, propiedad que comparten con $\mathcal{CGLM}$.

Relaciones entre restricciones

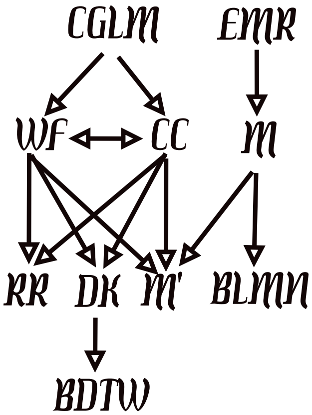


Figure: Relations between constraints

Empates permitidos

- Todos los conjuntos de restricciones salvo $\mathcal{RR}$ son correctos.
- Las restricciones $\mathcal{RR}$ pueden adaptarse de la forma siguiente:

$$\sum_{a:\ d_{ia}=d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} y_a \geq y_j \quad \forall i,j \in A. \qquad \mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$$

- Todas las relaciones de dominancia y de no dominancia se mantienen, sustituyendo $\mathcal{RR}$ por $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$.

Empates permitidos

- Todos los conjuntos de restricciones salvo $\mathcal{RR}$ son correctos.
- Las restricciones $\mathcal{RR}$ pueden adaptarse de la forma siguiente:

$$\sum_{a:\ d_{ia}=d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} y_a \geq y_j \quad \forall i,j \in A. \qquad \mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$$

- Todas las relaciones de dominancia y de no dominancia se mantienen, sustituyendo $\mathcal{RR}$ por $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$.

Empates permitidos

- Todos los conjuntos de restricciones salvo $\mathcal{RR}$ son correctos.
- Las restricciones $\mathcal{RR}$ pueden adaptarse de la forma siguiente:

$$\sum_{a:\ d_{ia}=d_{ij}} x_{ia} + \sum_{a:\ d_{ia}<d_{ij}} y_a \geq y_j \quad \forall i,j \in A. \qquad \mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$$

- Todas las relaciones de dominancia y de no dominancia se mantienen, sustituyendo $\mathcal{RR}$ por $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$.

Otras propiedades

Constraints	Dominate	Dominated by	p	ties	Relax (nt)	R(ties)	Fract.
$\mathcal{RR}$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	N	(2) (6) $\geq$	NS	NS
$\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(2) (6) $\geq$	$\geq$	Y
$\mathcal{WF}$	$\mathcal{RR}$ $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{M}'$ $\mathcal{BDTW}$	$\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{CC}$	$\mathcal{RR}$ $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$ $\mathcal{WF}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{M}'$ $\mathcal{BDTW}$	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6) $\geq$	$\geq$	Y
$\mathcal{DK}$	$\mathcal{BDTW}$	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{CGLM}$	$\mathcal{RR}$ $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$ $\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{M}'$ $\mathcal{BDTW}$	-	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{BLMN}$	-	$\mathcal{M}$ $\mathcal{EMR}$	Y	Y	-	-	N
$\mathcal{BDTW}$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{M}$	$\mathcal{BLMN}$ $\mathcal{M}'$	$\mathcal{EMR}$	Y	Y	-	-	N
$\mathcal{M}'$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$ $\mathcal{M}$ $\mathcal{EMR}$	N	Y	-	-	N
$\mathcal{EMR}$	$\mathcal{BLMN}$ $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$	-	Y	Y	(6)	-	N

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.

Eso es todo. . .

Eso es todo. . .

Eso es todo. . .

Eso es todo. . .

Mientras que en el clásico problema de la p-mediana la integridad de las variables x puede relajarse porque en la solución óptima queda garantizada por la forma del objetivo, algunas restricciones CA garantizan la integridad de x en todo el conjunto de soluciones factibles.

Proposición

$$\{(x,y)\in \mathbb{Z}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{WF}\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{WF}\}$$
$$\{(x,y)\in \mathbb{Z}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{RR}\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{RR}\}$$
$$\{(x,y)\in \mathbb{Z}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{CC}\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{CC}\}$$
$$\{(x,y)\in \mathbb{Z}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{DK}\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{DK}\}$$
$$\{(x,y)\in \mathbb{Z}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{BDTW}\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{BDTW}\}$$
$$\{(x,y)\in \mathbb{Z}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{CGLM}\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{CGLM}\}$$
$$\{(x,y)\in \mathbb{Z}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{EMR}\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}_+^{n^2}\times \mathbb{Z}_+^n:\ (1),(2),(3),\mathcal{EMR}\}$$

El resto de desigualdades no presentan esta propiedad.

Relajación de la integridad de x

Mientras que en el clásico problema de la p-mediana la integridad de las variables x puede relajarse porque en la solución óptima queda garantizada por la forma del objetivo, algunas restricciones CA garantizan la integridad de x en todo el conjunto de soluciones factibles.

Proposición

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{WF}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{WF}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{RR}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{RR}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{CC}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{CC}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{DK}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{DK}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{BDTW}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{BDTW}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{CGLM}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{CGLM}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{EMR}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),(2),(3),\mathcal{EMR}\}$$

El resto de desigualdades no presentan esta propiedad.

Otras propiedades

Proposición

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j \in A} x_{ij} \le 1, \ (3), \ \mathcal{RR}\} =$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : \ (1), \ (2), \ (3), \ \mathcal{RR}\}$$

Fijado $i \in A$, de (3) y $y_j \in \{0,1\}$ $\forall j$, existe $j_i := \arg\min\{d_{ij} : \ y_j = 1\}$. Usando $\mathcal{RR}$,

$$x_{ij_i} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij_i}} y_a \ge y_{j_i} \Leftrightarrow x_{ij_i} \ge 1$$

luego

- de $\sum_{j \in A} x_{ij} \le 1 \ \Rightarrow \ x_{ij_i} = 1$ y $x_{ij} = 0$ $\forall j \ne j_i$,
- $\sum_{i \in A} x_{ij} \ge x_{ij_i} = 1$.

Proposición

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j \in A} x_{ij} \leq 1,\ (3),\ \mathcal{RR}\} =$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n :\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{RR}\}$$

Fijado $i \in A$, de (3) y $y_j \in \{0,1\}\ \forall j$, existe $j_i := \arg\min\{d_{ij} :\ y_j = 1\}$. Usando $\mathcal{RR}$,

$$x_{ij_i} + \sum_{a:\ d_{ia} < d_{ij_i}} y_a \geq y_{j_i} \Leftrightarrow x_{ij_i} \geq 1$$

luego

- de $\sum_{j \in A} x_{ij} \leq 1\ \Rightarrow\ x_{ij_i} = 1$ y $x_{ij} = 0\ \forall j \neq j_i$,
- $\sum_{i \in A} x_{ij} \geq x_{ij_i} = 1$.

Otras propiedades

Constraints	Dominate	Dominated by	p	ties	Relax	R(ties)	Fract.
$\mathcal{RR}$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	N	(2) (6) $\geq$	NS	NS
$\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(2) (6) $\geq$	$\geq$	Y
$\mathcal{WF}$	$\mathcal{RR}$ $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{M}'$ $\mathcal{BDTW}$	$\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{CC}$	$\mathcal{RR}$ $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$ $\mathcal{WF}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{M}'$ $\mathcal{BDTW}$	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6) $\geq$	$\geq$	Y
$\mathcal{DK}$	$\mathcal{BDTW}$	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{CGLM}$	$\mathcal{RR}$ $\mathcal{RR}_{\mathcal{EMR}}$ $\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{M}'$ $\mathcal{BDTW}$	-	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{BLMN}$	-	$\mathcal{M}$ $\mathcal{EMR}$	Y	Y	-	-	N
$\mathcal{BDTW}$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{DK}$ $\mathcal{CGLM}$	N	Y	(6)	-	Y
$\mathcal{M}$	$\mathcal{BLMN}$ $\mathcal{M}'$	$\mathcal{EMR}$	Y	Y	-	-	N
$\mathcal{M}'$	-	$\mathcal{WF}$ $\mathcal{CC}$ $\mathcal{CGLM}$ $\mathcal{M}$ $\mathcal{EMR}$	N	Y	-	-	N
$\mathcal{EMR}$	$\mathcal{BLMN}$ $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$	-	Y	Y	(6)	-	N

Proposición

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j \in A} x_{ij} \leq 1, \ (2), \ (3), \ \mathcal{CC}\} =$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : \ (1), \ (2), \ (3), \ \mathcal{CC}\}$$

Fijando $i \in A$, de (3) y $y_j \in \{0,1\}$ $\forall j$, existe $j_i := \arg\min\{d_{ij} : \ y_j = 1\}$. Entonces usando $\mathcal{CC}$, $\sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij_i}} x_{ia} \geq y_{j_i} = 1$.

Ninguno de las otros conjuntos de restricciones cumple estas propiedades.

Otras propiedades

Proposición

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j \in A} x_{ij} \leq 1,\ (2),\ (3),\ \mathcal{CC}\} =$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n :\ (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{CC}\}$$

Fijando $i \in A$, de (3) y $y_j \in \{0,1\}\ \forall j$, existe $j_i := \arg\min\{d_{ij} :\ y_j = 1\}$. Entonces usando $\mathcal{CC}$, $\sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij_i}} x_{ia} \geq y_{j_i} = 1$.

Ninguno de las otros conjuntos de restricciones cumple estas propiedades.

Otras propiedades

Proposición

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j \in A} x_{ij} \leq 1,\ (2),\ (3),\ \mathcal{CC}\} =$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{Z}_+^n : (1),\ (2),\ (3),\ \mathcal{CC}\}$$

Fijando $i \in A$, de (3) y $y_j \in \{0,1\}\ \forall j$, existe $j_i := \arg\min\{d_{ij} : \ y_j = 1\}$. Entonces usando $\mathcal{CC}$, $\sum_{a:\ d_{ia} \leq d_{ij_i}} x_{ia} \geq y_{j_i} = 1$.

Ninguno de las otros conjuntos de restricciones cumple estas propiedades.

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.

Conclusiones

Hemos comprobado que todos los conjuntos de restricciones están dominados salvo $\mathcal{CGLM}$ y $\mathcal{EMR}$.

Dado que $\mathcal{CGLM}$ no requieren la presencia de (3) mientras que $\mathcal{EMR}$ obtienen ventaja precisamente de (3), la combinación de ambas parece indicada para resolver problemas de localización discreta con restricciones CA.

Aunque $\mathcal{CGLM}$ contenga del orden de n^3 restricciones, un subconjunto de n^2 de ellas continúa dominando a $\mathcal{WF}$, por lo que el tamaño del problema sólo aumentaría si se utiliza un procedimiento de separación y corte.

No obstante, en caso de que no haya empates entre distancias, la adición de $\mathcal{RR}$ permite suprimir (2) y tratarlas como desigualdades válidas a la vez que fuerza asignación a la planta más cercana, por lo que puede ser interesante incluirlas en una formulación.