Bases de Graver y optimización entera no lineal

Jesús Gago Vargas
Universidad de Sevilla

Noviembre 2011

Objetivo de la charla

Se exponen resultados recientes de S. Onn sobre la aplicación de las bases de Graver a la programación entera no lineal.

Contenido:

S. Onn.
Nonlinear Discrete Optimization. An algorithmic theory.
Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society, 2010.

R. Hemmecke, S. Onn, R. Weismantel.
A polynomial oracle-time algorithm for convex integer minimization.
Mathematical Programming, 126(1), 97-117, 2011.

J. De Loera, R. Hemmecke, S. Onn, R. Weismantel.
n-fold integer programming.
Discrete Optim., 5, 231-241, 2008.

R. Hemmecke, S. Onn, R. Weismantel.
n-fold integer programming and nonlinear multi-transshipment.
Optimization Letters, 5(1), 13-25, 2011.

Programación entera no lineal

$$\text{mín}_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x}),$$
$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

donde

$$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m, \mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n_\infty.$$

La función f es, en ocasiones, la restricción de una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}^n$. Desde un punto de vista más general, solamente será necesario que venga dada como un *oráculo de comparación*:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \text{ decide si } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}).$$

Retículo

$$\mathcal{L}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \ker_{\mathbb{Z}}(A), \mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}(A) - \{\mathbf{0}\}.$$

Ideal tórico

$$I_A = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{L}(A) \rangle.$$

Identificación de vectores $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(A)$ con binomios $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$.

Retículo

$$\mathcal{L}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \ker_{\mathbb{Z}}(A), \mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}(A) - \{\mathbf{0}\}.$$

Ideal tórico

$$I_A = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{L}(A) \rangle.$$

Identificación de vectores $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(A)$ con binomios $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$.

Orden parcial $\sqsubseteq$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathbf{x}$ es conforme con $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} \sqsubseteq \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i y_i \geq 0 \\ |x_i| \leq |y_i|, i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Los puntos están en el mismo octante de $\mathbb{R}^n$ y cada componente de $\mathbf{x}$ está acotada, en valor absoluto, por la correspondiente componente de $\mathbf{y}$.

Usaremos $\mathbf{x} \sqsubset \mathbf{y}$ para indicar $\mathbf{x} \sqsubseteq \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Orden parcial $\sqsubseteq$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathbf{x}$ es conforme con $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} \sqsubseteq \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i y_i \geq 0 \\ |x_i| \leq |y_i|, i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Los puntos están en el mismo octante de $\mathbb{R}^n$ y cada componente de $\mathbf{x}$ está acotada, en valor absoluto, por la correspondiente componente de $\mathbf{y}$.
Usaremos $\mathbf{x} \sqsubset \mathbf{y}$ para indicar $\mathbf{x} \sqsubseteq \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Suma conforme

Una suma finita $\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{v}_i$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ se dice **conforme** si $\mathbf{v}_i \sqsubseteq \mathbf{u}$ para todo i.

Circuito

Un **circuito** de A es un elemento no nulo $\mathbf{c} \in \mathcal{L}(A)$ cuyo soporte es minimal con respecto a la inclusión, y cuyas entradas son relativamente primas.

El conjunto de circuitos se nota por $\mathcal{C}(A)$. Tiene simetría central:

$$\mathbf{c} \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow -\mathbf{c} \in \mathcal{C}(A).$$

Ejemplo

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}(A) = \pm\{(2,-1,0),(0,-1,2),(1,0,-1)\}.$$

Circuito

Un **circuito** de A es un elemento no nulo $\mathbf{c} \in \mathcal{L}(A)$ cuyo soporte es minimal con respecto a la inclusión, y cuyas entradas son relativamente primas.

El conjunto de circuitos se nota por $\mathcal{C}(A)$. Tiene simetría central:

$$\mathbf{c} \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow -\mathbf{c} \in \mathcal{C}(A).$$

Ejemplo

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}(A) = \pm\{(2,-1,0),(0,-1,2),(1,0,-1)\}.$$

Circuito

Un **circuito** de A es un elemento no nulo $\mathbf{c} \in \mathcal{L}(A)$ cuyo soporte es minimal con respecto a la inclusión, y cuyas entradas son relativamente primas.

El conjunto de circuitos se nota por $\mathcal{C}(A)$. Tiene simetría central:

$$\mathbf{c} \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow -\mathbf{c} \in \mathcal{C}(A).$$

Ejemplo

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}(A) = \pm\{(2,-1,0),(0,-1,2),(1,0,-1)\}.$$

Base de Graver

La **base de Graver** de una matriz de enteros $A_{m\times n}$ es el conjunto finito $\mathrm{Gr}(A) \subset \mathbb{Z}^n$ de elementos minimales de $\mathcal{L}^*(A)$.

$$\mathbf{g} \in \mathrm{Gr}(A) \Rightarrow -\mathbf{g} \in \mathrm{Gr}(A).$$

Se tiene que

$$\mathcal{C}(A) \subset \mathrm{Gr}(A).$$

Ejemplo

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}(A) = \pm\{(2,-1,0),(0,-1,2),(1,0,-1)\} \\ \mathrm{Gr}(A) = \mathcal{C}(A) \cup \{(1,-1,1)\}. \end{array} \right.$$

Lema de representación

Todo vector $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^*(A)$ es una suma conforme $\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{g}_i$ de elementos $\mathbf{g}_i \in \mathrm{Gr}(A)$, con posiblemente algunos elementos repetidos.

$$A_{m\times n} \Rightarrow \Lambda(A) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_{m\times n} \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \text{(Lawrence lifting)}$$

Algoritmo de cálculo de una base de Graver

1. Escoja un orden cualquiera en $k[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Calcule una base de Gröbner reducida $\mathcal{G}$ del ideal tórico $I_{\Lambda(A)}$.
2. Sustituya $y_1, \ldots, y_m \mapsto 1$ en $\mathcal{G}$. El subconjunto resultante de $k[\mathbf{x}]$ es la base de Graver.

Optimización lineal

Existe un algoritmo tal que,

- dada una base de Graver $\mathrm{Gr}(A)$ de una matriz entera $A_{m\times n}$,
- vectores $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n_\infty$, y
- vectores $\mathbf{x}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$ con $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$,

afirma si $\mathbf{x}$ es óptimo para el problema de optimización lineal

$$\max\{\mathbf{w}\cdot\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{z} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{u}\}$$

o devuelve un punto mejor $\hat{\mathbf{x}}$.

Nota: $\mathrm{Gr}(A)$ no depende de $\mathbf{w}$.

Minimiza convexa y separable

Existe un algoritmo tal que,

- dada una matriz entera A de orden $m \times n$ y su base de Graver $\mathrm{Gr}(A)$,
- vectores $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n_\infty$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, y
- una función separable convexa $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ presentada por un oráculo de comparación,

resuelve en tiempo polinómico del tamaño de $\mathrm{Gr}(A)$ el problema

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u}\}.$$

Producto n-fold

Una $(r, s) \times t$ bimatriz A es una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

donde A_1 es de orden $r \times t$ y A_2 de orden $s \times t$. Se llama producto n-fold de A a la matriz

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 & \overset{n}{\dots} & A_1 \\ A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_2 \end{pmatrix} \text{ de orden } (r + ns) \times nt.$$

El problema de programación entera n-fold es el problema de optimización sobre la región

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{nt} \mid A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}, \text{ con } \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{r+ns}, \mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{nt}_{\infty}.$$

Tipo

Sea A una $(r,s) \times t$ matriz, con bloques A_1, A_2. Para cada n, indexamos un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{nt}$ como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^n \end{pmatrix}, \text{ con cada ladrillo } \mathbf{x}^k \in \mathbb{Z}^t.$$

El **tipo** del vector $\mathbf{x}$ es el número

$$\text{type}(\mathbf{x}) = |k \mid \mathbf{x}^k \neq \mathbf{0}|, \text{ es decir, el número de bloques no nulos.}$$

Complejidad de Graver

La **complejidad de Graver** de una bimatriz A es

$$g(A) = \text{ínf}\{g \in \mathbb{Z}_+ \mid \text{type}(\mathbf{x}) \leq g, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \text{Gr}(A^{(n)}) \text{ y todo } n\}.$$

Sea A una bimatriz. Entonces $g(A)$ es finito.

Un n-levantamiento de un vector

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}^m \end{pmatrix} \text{ formado por } m \text{ ladrillos}$$

es cualquier vector

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}^n \end{pmatrix} \text{ formado por } n \text{ ladrillos}$$

tales que para algunos $1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n$ tenemos

$$\mathbf{z}^{k_i} = \mathbf{y}^i \text{ para todo } i = 1, \ldots, m,$$

y todos los demás ladrillos de $\mathbf{z}$ son nulos.
La construcción de $\mathbf{z}$ consiste en la elección de m trozos entre n.
En particular, $\text{type}(\mathbf{z}) = \text{type}(\mathbf{y})$.

Base de Graver n-fold, primera versión

Sea A una bimatriz. Existe un algoritmo tal que, dado n, calcula la base de Graver de $\mathrm{Gr}(A^{(n)})$ a partir de $\mathrm{Gr}(A^{(g)})$, con $g = g(A)$ la complejidad de A.

Lo interesante del teorema anterior es que si se tiene $\mathrm{Gr}(A^{(g)})$, entonces

$$\mathrm{Gr}(A^{(n)}) = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} \text{ es un } n-\text{levantamiento de algún } \mathbf{y} \in \mathrm{Gr}(A^{(g)})\},$$

y esta construcción es polinómica en n.

Ejemplo

$A_1 = I_2, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Entonces $Gr(A_2) = \pm\{(1, -1)\}$ y $g = g(A) = 2$. El producto g-fold de A es

$$A^{(g)} = A^{(2)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y su base de Graver es

$$Gr(A^{(g)}) = Gr(A^{(2)}) = \pm\{(1, -1, -1, 1)\}.$$

Ejemplo

Cálculo de la base de Graver de $A^{(4)}$:

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la construcción del teorema anterior (levantamientos de elementos de $\mathrm{Gr}(A^{(2)})$, la base de Graver de $A^{(4)}$ se obtiene tomando $\binom{4}{2}$ 4-levantamientos de cada uno de los dos elementos de $\mathrm{Gr}(A^{(2)})$ (trozos de 2 elementos consecutivos).

Ejemplo

$\mathrm{Gr}(A^{(2)}) = \pm\{(1,-1,-1,1)\}$,

$$\mathrm{Gr}(A^{(4)}) = \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Optimización n-fold, primera versión

Existe un algoritmo tal que

- dada A una bimatriz $(r, s) \times t$ y $n \in \mathbb{N}$,
- $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{nt}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{r+ns}$,
- $f : \mathbb{Z}^{nt} \to \mathbb{Z}$ es separable y convexa,

se puede resolver de manera eficiente el problema

$$\text{mín}\{f(\mathbf{x}) \mid A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

Base de Graver n-fold, segunda versión

Sea A una bimatriz $(r, s) \times t$ y W una bimatriz $(p, q) \times t$, y $n \in \mathbb{N}$. Existe un algoritmo eficiente que calcula $\mathrm{Gr}(B)$, donde

$$B = \begin{pmatrix} A^{(n)} & 0 \\ W^{(n)} & I \end{pmatrix}, \text{ matriz } (r + ns + p + nq) \times (nt + p + nq).$$

Optimización n-fold, segunda versión

Existe un algoritmo tal que

- dada A una bimatriz $(r, s) \times t$ y $n \in \mathbb{N}$,
- W una bimatriz $(p, q) \times t$,
- $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{nt}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{r+ns}, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{Z}^{n+pq}$,
- $f : \mathbb{Z}^{p+nq} \to \mathbb{Z}, g : \mathbb{Z}^{nt} \to \mathbb{Z}$ separables y convexas,

se puede resolver de manera eficiente el problema

$$\min\{f(W^{(n)}\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{nt}, A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{l}} \leq W^{(n)}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

- G un digrafo con s vértices y t aristas.
- l productos.
- Cada producto tiene un vector de demanda $\mathbf{d}^k \in \mathbb{Z}^s$, con d_v^k la demanda del producto k en el vértice v. ($+$ suministro, $-$ consumo).
- Capacidad u_e por arista.

Un transporte multi-producto es un vector $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^l)$, con $\mathbf{x}^k \in \mathbb{Z}_+^t$ (t es el número de aristas) para todo k, y x_e^k es el flujo del producto k por la arista e.

Restricciones

$\sum_{k=1}^{l} x_e^k \leq u_e,$ para cada arista e, (capacidad)
$\sum_{e\in\delta^+(v)} x_e^k - \sum_{e\in\delta^-(v)} x_e^k = d_v^k,$ para cada vértice v, (demanda)

donde

$\delta^+(v) =$ aristan que entran en $v, \delta^-(v) =$ aristas que salen de v.

Función objetivo

$f_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ calcula el flujo combinado de todos los productos sobre la arista e.
$g_e^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ costes que dependen del producto y la arista.
El coste total es

$$\sum_{e=1}^{t} \left(f_e \left(\sum_{k=1}^{l} x_e^k \right) + \sum_{k=1}^{l} g_e^k(x_e^k) \right).$$

Many-commodity transshipment

Para cada grafo dirigido G existe un algoritmo tal que dados

- l productos,
- una demanda $d_k^v \in \mathbb{Z}$ para cada producto k y vértice v,
- capacidades de aristas $u_e \in \mathbb{Z}_+$,
- costes convexos $f_e, g_e^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

resuelve

$$\min \sum_{e=1}^{t} \left(f_e \left(\sum_{k=1}^{l} x_e^k \right) + \sum_{k=1}^{l} g_e^k(x_e^k) \right),$$

sujeto a

$$\begin{array}{ll} x_e^k \in \mathbb{Z}_+, & \\ \sum_{e\in\delta^+(v)} x_e^k - \sum_{e\in\delta^-(v)} x_e^k = d_v^k, & \text{para cada vértice } v, \\ \sum_{k=1}^{l} x_e^k \le u_e, & \text{para cada arista } e. \end{array}$$

G digrafo con s vértices, t aristas, y D su $s \times t$ matriz de incidencia, definida como

$$D_{v,e} = \begin{cases} -1 & \text{si la arista } e \text{ sale del vértice } v. \\ 1 & \text{si la arista } e \text{ entra en el vértice } v. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean $f : \mathbb{Z}^t \to \mathbb{Z}, g : \mathbb{Z}^{lt} \to \mathbb{Z}$ definidas como

$$\begin{array}{l} f(\mathbf{y}) = \sum_{e=1}^{t} f_e(y_e), y_e = \sum_{k=1}^{l} x_e^k, \\ g(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{t} \sum_{k=1}^{l} g_e^k(x_e^k). \end{array}$$

Sea $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^l)$ el vector que contiene el flujo de cada producto, con cada $\mathbf{x}^k \in \mathbb{Z}^t$. El problema se reescribe como

$$\min\{f\left(\sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k\right) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{lt}, D\mathbf{x}^k = \mathbf{d}^k, \sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k \leq \mathbf{u}\}.$$

Tomamos entonces A la $(0, s) \times t$ bimatriz con el primer bloque A_1 vacío, y el segundo bloque $A_2 = D$. Sea W la $(t, 0) \times t$ bimatriz, con el primer bloque $W_1 = I_t$, y el segundo bloque W_2 vacío. Sea $\mathbf{b} = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^l)$, y el problema se convierte en el problema l-fold

$$\min\{f(W^l\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{lt}, A^{(l)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, W^{(l)}\mathbf{x} \leq \mathbf{u}\},$$

Minimiza separable y convexa

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

n-fold

$$\min\{f(W^{(n)}\mathbf{x})+g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{nt}, A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{l}} \leq W^{(n)}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

Problema de transporte multi-producto

$$\min\{f\left(\sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k\right) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{lt}, D\mathbf{x}^k = \mathbf{d}^k, \sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k \leq \mathbf{u}\}.$$

$$\overbrace{\text{Base de Graver}}$$

Minimiza separable y convexa

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

n-fold

$$\min\{f(W^{(n)}\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{nt}, A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{l}} \leq W^{(n)}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

Problema de transporte multi-producto

$$\min\{f\left(\sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k\right) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{lt}, D\mathbf{x}^k = \mathbf{d}^k, \sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k \leq \mathbf{u}\}.$$

$\overbrace{\text{Base de Graver}}$

Minimiza separable y convexa

$$\text{mín}\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

n-fold

$$\text{mín}\{f(W^{(n)}\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{nt}, A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{l}} \leq W^{(n)}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

Problema de transporte multi-producto

$$\text{mín}\{f\left(\sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k\right) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{lt}, D\mathbf{x}^k = \mathbf{d}^k, \sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k \leq \mathbf{u}\}.$$

$$\overbrace{\text{Base de Graver}}$$

Minimiza separable y convexa

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

n-fold

$$\min\{f(W^{(n)}\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{nt}, A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{l}} \leq W^{(n)}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

Problema de transporte multi-producto

$$\min\{f\left(\sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k\right) + g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{lt}, D\mathbf{x}^k = \mathbf{d}^k, \sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}^k \leq \mathbf{u}\}.$$

$$\overbrace{\text{Base de Graver}}$$