

Problemas inversos mediante problemas variacionales vectoriales

P. Pedregal

Universidad de Castilla-La Mancha

Enero, 2024, Red COPI2A, Sevilla

F. Maestre (US) y L. Bandeira (U de Évora)

Planteamiento

- ▶ Ecuación básica:

$$|\nabla u_2| \nabla u_1 + |\nabla u_1| \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Planteamiento

- ▶ Ecuación básica:

$$|\nabla u_2| \nabla u_1 + |\nabla u_1| \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Coeficiente de conductividad:

$$\gamma = \frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|}.$$

- ▶ Datos en la frontera: $(u_{1,0}, u_{2,0})$ para (u_1, u_2) . Datos para el problema de conductividad:

$$\left(u_{1,0}, \frac{d}{d\tau} u_{2,0} \right), \quad \tau = -\mathbf{Q}\nu, \quad \nu, \text{ vector normal,}$$

$$u_1 = u_{1,0}, \quad \gamma \nabla u_1 \cdot \nu = \frac{d}{d\tau} u_{2,0} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Planteamiento

- ▶ Ecuación básica:

$$|\nabla u_2| \nabla u_1 + |\nabla u_1| \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Coeficiente de conductividad:

$$\gamma = \frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|}.$$

- ▶ Datos en la frontera: $(u_{1,0}, u_{2,0})$ para (u_1, u_2) . Datos para el problema de conductividad:

$$\left(u_{1,0}, \frac{d}{d\tau} u_{2,0} \right), \quad \tau = -\mathbf{Q}\nu, \quad \nu, \text{ vector normal,}$$

$$u_1 = u_{1,0}, \quad \gamma \nabla u_1 \cdot \nu = \frac{d}{d\tau} u_{2,0} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

IDEA: recuperar la ecuación básica mediante minimización en pares (u_1, u_2) de un funcional apropiado bajo condiciones de frontera Dirichlet proporcionadas por mediciones.

Posibilidades

1. La ecuación básica conduce a

$$\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|} \nabla u_1 \right) = 0, \quad \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_1|}{|\nabla u_2|} \nabla u_2 \right) = 0,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1| |\nabla u_2| d\mathbf{x}, \quad I_3(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [|\nabla u_1| |\nabla u_2| - \det(\nabla u_1, \nabla u_2)] d\mathbf{x}.$$

Posibilidades

1. La ecuación básica conduce a

$$\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|} \nabla u_1 \right) = 0, \quad \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_1|}{|\nabla u_2|} \nabla u_2 \right) = 0,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1| |\nabla u_2| d\mathbf{x}, \quad I_3(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [|\nabla u_1| |\nabla u_2| - \det(\nabla u_1, \nabla u_2)] d\mathbf{x}.$$

2. Ecuación básica:

$$\gamma \nabla u_1 + \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0} \implies \gamma = \frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|} \implies |\nabla u_2| \nabla u_1 + |\nabla u_1| \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0}.$$

Posibilidades

1. La ecuación básica conduce a

$$\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|} \nabla u_1 \right) = 0, \quad \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_1|}{|\nabla u_2|} \nabla u_2 \right) = 0,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1| |\nabla u_2| \, d\mathbf{x}, \quad I_3(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [|\nabla u_1| |\nabla u_2| - \det(\nabla u_1, \nabla u_2)] \, d\mathbf{x}.$$

2. Ecuación básica:

$$\gamma \nabla u_1 + \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0} \implies \gamma = \frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|} \implies |\nabla u_2| \nabla u_1 + |\nabla u_1| \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0}.$$

$$I_2(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2)^2 \, d\mathbf{x}.$$

Posibilidades

1. La ecuación básica conduce a

$$\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|} \nabla u_1 \right) = 0, \quad \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u_1|}{|\nabla u_2|} \nabla u_2 \right) = 0,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1| |\nabla u_2| d\mathbf{x}, \quad I_3(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [|\nabla u_1| |\nabla u_2| - \det(\nabla u_1, \nabla u_2)] d\mathbf{x}.$$

2. Ecuación básica:

$$\gamma \nabla u_1 + \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0} \implies \gamma = \frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|} \implies |\nabla u_2| \nabla u_1 + |\nabla u_1| \mathbf{Q} \nabla u_2 = \mathbf{0}.$$

$$I_2(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2)^2 d\mathbf{x}.$$

3. Ambos funcionales anteriores no son “buenos”:

$$I_1(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\det \nabla \mathbf{u}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2).$$

Aproximación numérica

- ▶ Métodos standard de minimización (descenso (más rápido), gradiente conjugado, Newton, . . .) aplicados a cada funcional.

Aproximación numérica

- ▶ Métodos standard de minimización (descenso (más rápido), gradiente conjugado, Newton, ...) aplicados a cada funcional.
- ▶ Certificado de convergencia:

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|} \cdot \frac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|} \right) \right| d\mathbf{x} = 0 \implies (u_1, u_2) \text{ es una solución.}$$

Aproximación numérica

- ▶ Métodos standard de minimización (descenso (más rápido), gradiente conjugado, Newton, ...) aplicados a cada funcional.
- ▶ Certificado de convergencia:

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|} \cdot \frac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|} \right) \right| d\mathbf{x} = 0 \implies (u_1, u_2) \text{ es una solución.}$$

- ▶ Datos sintéticos. Dada γ (a recuperar)

$$u_0 = 10x + \sin(y) \implies v_0, \text{ compatible con } \gamma, u_0.$$

Aproximación numérica

- ▶ Métodos standard de minimización (descenso (más rápido), gradiente conjugado, Newton, ...) aplicados a cada funcional.
- ▶ Certificado de convergencia:

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|} \cdot \frac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|} \right) \right| d\mathbf{x} = 0 \implies (u_1, u_2) \text{ es una solución.}$$

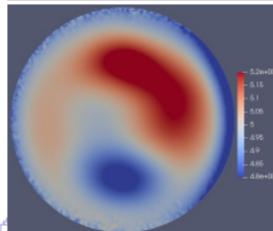
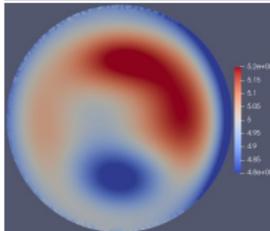
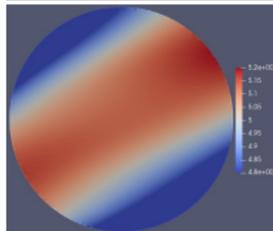
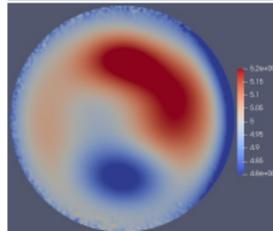
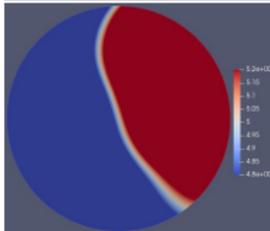
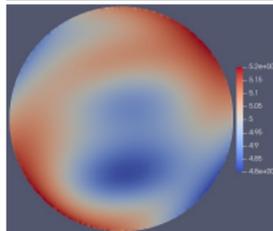
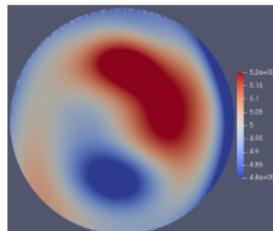
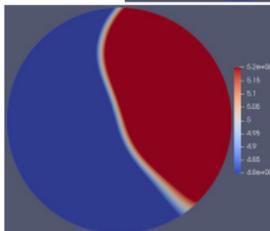
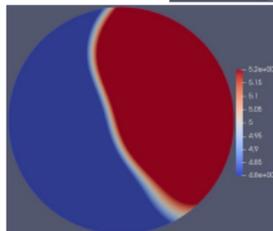
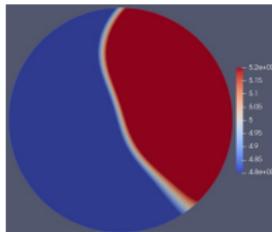
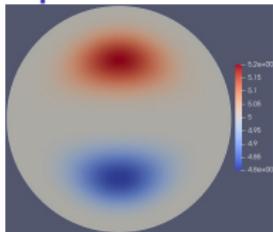
- ▶ Datos sintéticos. Dada γ (a recuperar)

$$u_0 = 10x + \sin(y) \implies v_0, \text{ compatible con } \gamma, u_0.$$

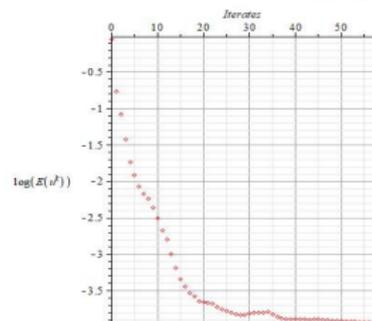
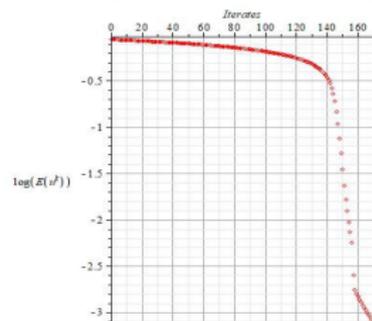
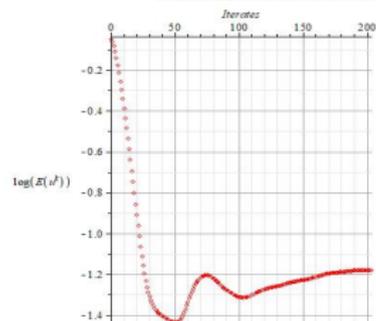
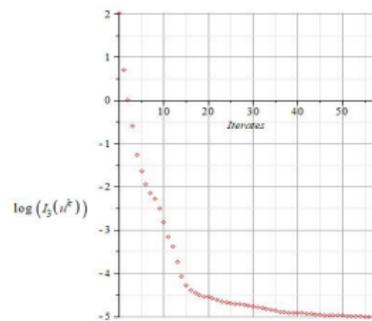
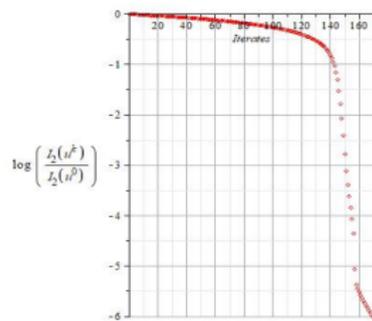
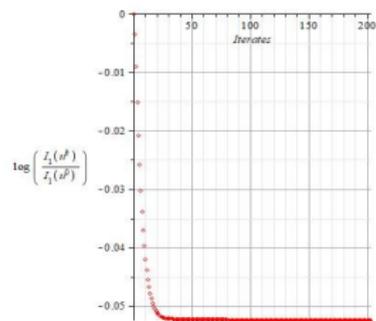
- ▶ Inicialización. Partiendo de (u_0, v_0) (paso anterior),

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= 1,2(2y^2 \sin(x) - 3 \cos(x))(x^2 + y^2 - 1); \\ g_2(x, y) &= -0,3(3x^2 \sin(x) - x \cos(y))(x^2 + y^2 - 1); \\ (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) &\in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)|_{\partial\Omega} = (u_0, v_0); \\ \mathbf{u}^0 &= (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) + (g_1, g_2). \end{aligned}$$

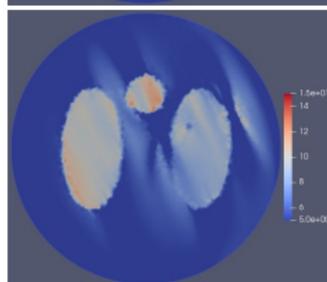
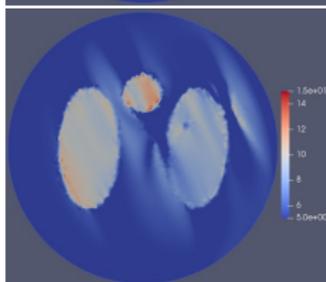
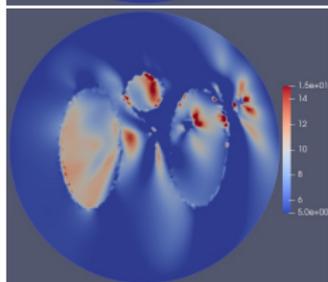
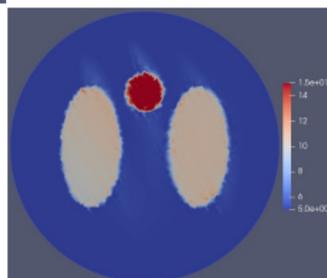
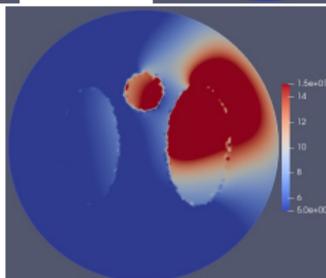
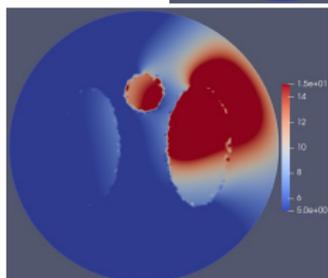
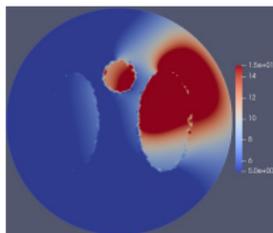
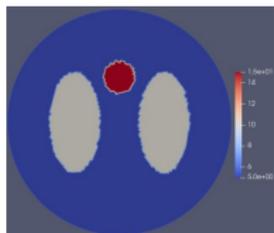
Primer ejemplo



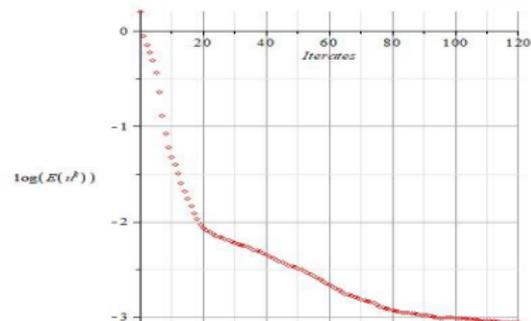
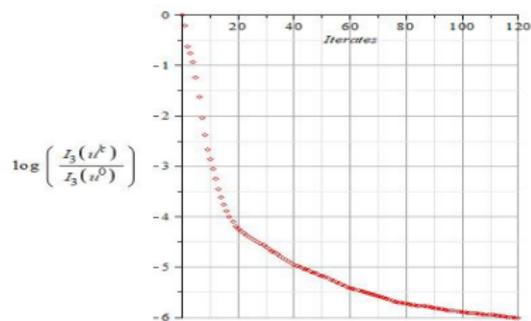
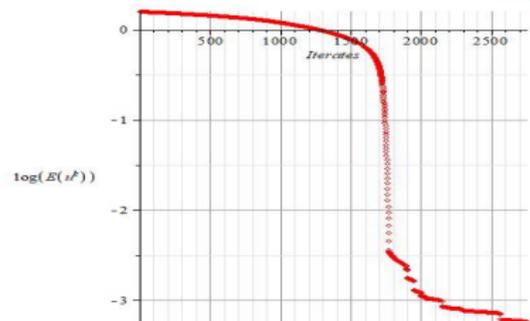
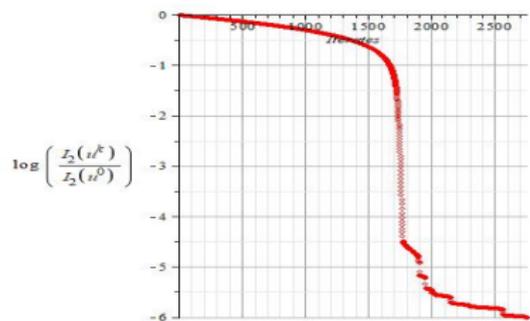
Costes; evidencia de convergencia



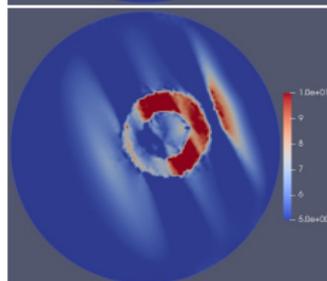
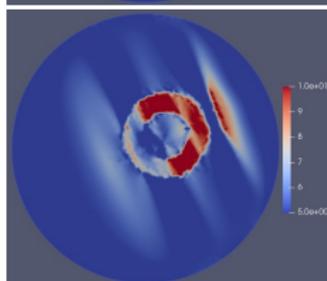
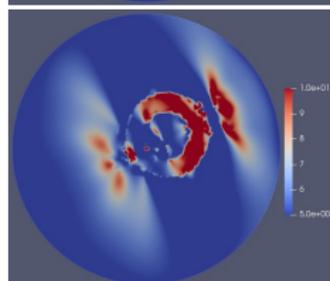
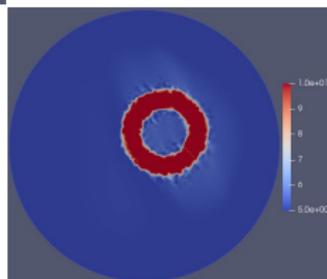
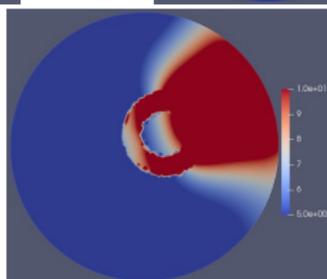
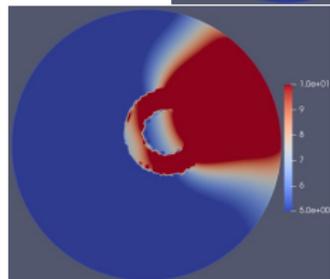
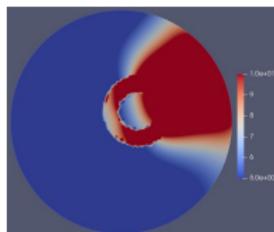
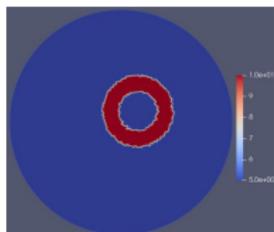
Segundo ejemplo



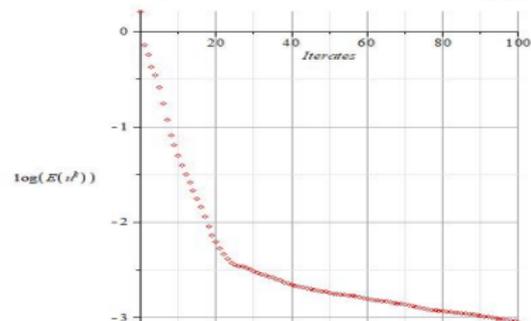
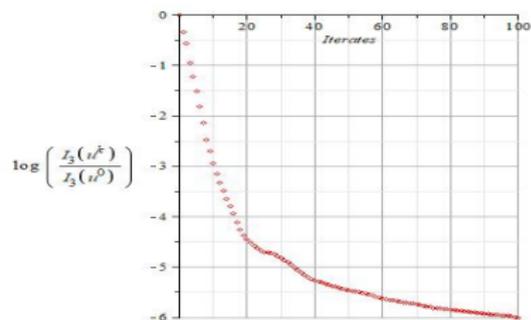
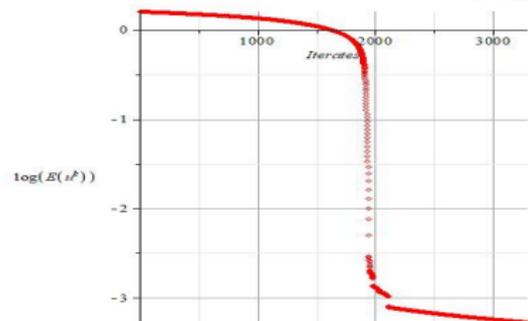
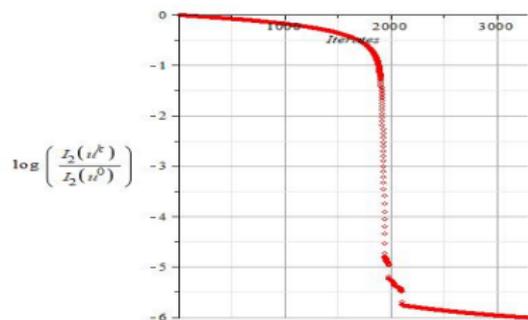
Costes y evidencia de convergencia



Tercer ejemplo



Costes y evidencia de convergencia



Conclusiones y trabajo futuro

- ▶ El comportamiento de I_1 no es bueno, a pesar de gozar de las mejores propiedades analíticas.

Conclusiones y trabajo futuro

- ▶ El comportamiento de I_1 no es bueno, a pesar de gozar de las mejores propiedades analíticas.
- ▶ El comportamiento de I_2 es, con diferencia, el mejor, a pesar de ser el más sencillo. El mejor comportamiento se encontró con un método de descenso.

Conclusiones y trabajo futuro

- ▶ El comportamiento de I_1 no es bueno, a pesar de gozar de las mejores propiedades analíticas.
- ▶ El comportamiento de I_2 es, con diferencia, el mejor, a pesar de ser el más sencillo. El mejor comportamiento se encontró con un método de descenso.
- ▶ Algunos datos: aproximaciones con FreeFem; discretización con 15752 triángulos; número de iteraciones: altamente variable desde unas pocas decenas hasta varios miles.

Conclusiones y trabajo futuro

- ▶ El comportamiento de I_1 no es bueno, a pesar de gozar de las mejores propiedades analíticas.
- ▶ El comportamiento de I_2 es, con diferencia, el mejor, a pesar de ser el más sencillo. El mejor comportamiento se encontró con un método de descenso.
- ▶ Algunos datos: aproximaciones con FreeFem; discretización con 15752 triángulos; número de iteraciones: altamente variable desde unas pocas decenas hasta varios miles.
- ▶ TRABAJO FUTURO. Datos reales; robustez de las aproximaciones; datos sintéticos generados con una matriz homogeneizada no diagonal; entender por qué el funcional I_2 produce tan buenos resultados; más experimentos con más de dos pares de medidas; el caso 3D.