

Grupo de Investigación: Control y Optimización

Eduardo Casas

Universidad de Cantabria
Santander, Spain
eduardo.casas@unican.es



Back

Close

Equipo Investigador

- **Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación:**

- Eduardo Casas

- **Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación:**

- Luis Alberto Fernández
- Cecilia Pola

- **Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo:**

- Mariano Mateos

Líneas de Investigación

- **Control Óptimo de Ecuaciones en Derivadas Parciales:** análisis teórico y numérico de edps, control de edps lineales y no lineales (ecuaciones semilineales y cuasilineales, ecuaciones de Navier-Stokes), existencia de controles óptimos, condiciones de optimalidad de primer y segundo orden, aproximación numérica (convergencia, estimaciones del error, algoritmos numéricos), propiedades de estabilidad, controles sparse, problemas con horizonte infinito.
- **Aplicaciones en Oncología:** Control óptimo de problemas asociados a ecuaciones ordinarias o en derivadas parciales que aparecen cuando se modeliza el crecimiento de tumores y su tratamiento quimioterapéutico, tomando en consideración diferentes farmacodinámicas.

Control Óptimo de Ecuaciones en Derivadas Parciales



Back

Close

Un Típico Problema de Control

$$(P) \quad \min_{u \in U_{ad}} J(u)$$

$$J(u) = \frac{\gamma_Q}{2} \int_Q (y_u - y_Q)^2 dx dt + \frac{\gamma_\Omega}{2} \int_\Omega (y_u(T) - y_\Omega)^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_Q u^2 dx dt$$

$$\gamma_Q, \gamma_\Omega, \kappa \geq 0 \text{ y } \gamma_Q + \gamma_\Omega > 0$$

$$U_{ad} = \{u \in L^2(Q) : \alpha \leq u(x, t) \leq \beta \text{ a.e. in } Q\}$$

$-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ e y_u es la solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = u & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \quad y(0) = y_0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$



Back

Close

Hipótesis

- $y_Q \in L^r(0, T; L^p(\Omega))$ con $r, p \geq 2$ y $\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} < 1$, $y_\Omega, y_0 \in L^\infty(\Omega)$
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 satisfaciendo

$$\exists C_f \in \mathbb{R} \text{ tal que } f'(y) \geq C_f \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Teorema. Para cada $u \in L^2(Q)$ la ecuación de estado posee una única solución $y_u \in W(0, T) = L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|y_u\|_{W(0, T)} + \|f(y_u)\|_{L^2(Q)} \leq C \left(|f(0)| + \|u\|_{L^2(Q)} + \|y_0\|_{L^\infty(\Omega)} \right)$$

Si además $u \in L^r(0, T; L^p(\Omega))$ con $r, p \geq 2$ y $\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} < 1$, entonces $y_u \in L^\infty(Q)$. Finalmente, si $u_k \rightharpoonup u$ en $L^2(Q)$, entonces $y_{u_k} \rightharpoonup y_u$ en $W(0, T)$ y $f(y_{u_k}) \rightharpoonup f(y_u)$ en $L^2(Q)$.

Existencia de Solución de (P)



Teorema. Si $\kappa > 0$ o $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, entonces (P) posee al menos una solución. Además, cada solución local es una función de $L^\infty(Q)$.



Back

Close

Diferenciabilidad de la Función $u \rightarrow y_u$

• Sea $G : L^r(0, T; L^p(\Omega)) \longrightarrow L^\infty(Q) \cap W(0, T)$ la aplicación definida por $G(u) = y_u$, con $r, p \geq 2$ y $\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} < 1$.

Teorema. La aplicación G es de clase C^2 . Para cada u, v, v_1 , y v_2 pertenecientes a $L^r(0, T; L^p(\Omega))$ las derivadas $z_v = G'(u)v$ y $z_{v_1, v_2} = G''(u)(v_1, v_2)$ son las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial z_v}{\partial t} - \Delta z_v + f'(y_u)z_v = v & \text{en } Q \\ z_v = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad z_v(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{v_1, v_2}}{\partial t} - \Delta z_{v_1, v_2} + f'(y_u)z_{v_1, v_2} + f''(y_u)z_{v_1}z_{v_2} = 0 & \text{en } Q \\ z_{v_1, v_2} = 0 \text{ sobre } \Sigma \quad z_{v_1, v_2}(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Diferenciabilidad de J

Corolario. La función $J : L^r(0, T; L^p(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 y sus derivadas vienen dadas por las fórmulas

$$J'(u)v = \int_Q (\varphi_u + \kappa u)v \, dx \, dt$$

$$J''(u)(v_1, v_2) = \int_Q \left[(1 - f''(y_u)\varphi_u)z_{v_1}z_{v_2} + \kappa v_1 v_2 \right] dx \, dt$$

donde $z_{v_i} = G'(u)v_i$, $i = 1, 2$, y $\varphi_u \in L^\infty(\Omega) \cap W(0, T)$ es la solución de la ecuación de estado adjunto

$$\begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi + f'(y_u)\varphi = \gamma_Q(y_u - y_Q) & \text{in } Q, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma, \quad \varphi(T) = \gamma_\Omega(y_u - y_\Omega) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Condiciones de Optimalidad de Primer Orden

Teorema. Para cada solución local $\bar{u}$ de (P) existen $\bar{y}, \bar{\varphi} \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + f(\bar{y}) = \bar{u} & \text{en } Q \\ \bar{y} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \bar{y}(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \Delta \bar{\varphi} + f'(\bar{y})\bar{\varphi} = \gamma_Q(\bar{y} - y_Q) & \text{en } Q \\ \bar{\varphi} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \bar{\varphi}(T) = \gamma_\Omega(\bar{y}(T) - y_\Omega) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

$$\int_Q (\bar{\varphi} + \kappa \bar{u})(u - \bar{u}) \, dx \, dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$



Back

Close

Consecuencias

Corolario. Supongamos que $\bar{u} \in U_{ad}$ y $\bar{\varphi}$ satisfacen las condiciones de optimalidad de primer orden. Entonces,

$$\text{Si } \kappa > 0 \Rightarrow \bar{u}(x, t) = \text{Proj}_{[\alpha, \beta]} \left(-\frac{1}{\kappa} \bar{\varphi}(x, t) \right)$$

$$\text{Si } \kappa = 0 \Rightarrow \bar{u}(x, t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \bar{\varphi}(x, t) > 0 \\ \beta & \text{si } \bar{\varphi}(x, t) < 0 \end{cases}$$

Además,

- si $\kappa > 0$ y $\gamma_\Omega = 0$ o $y_\Omega \in H_0^1(\Omega)$, entonces $\bar{u} \in H^1(Q)$
- si $\kappa = 0$ y $|\{(x, t) \in Q : \bar{\varphi}(x, t) = 0\}| = 0$, entonces $\bar{u}(x, t) \in \{\alpha, \beta\}$ a.e. en Q (Control bang-bang)

El Cono de Direcciones Criticas

$$C_{\bar{u}} = \left\{ v \in L^2(Q) : J'(\bar{u})v = 0 \text{ y } v(x, t) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \alpha \\ \leq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \beta \end{cases} \right\}$$

Equivalentemente,

$$C_{\bar{u}} = \left\{ v \in L^2(Q) : v(x, t) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \alpha \\ \leq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \beta \\ = 0 & \text{si } \bar{\varphi}(x, t) + \kappa \bar{u}(x, t) \neq 0 \end{cases} \right\}$$



Back

Close

Condiciones de Optimalidad de Segundo Orden



Teorema. Si $\bar{u}$ es una solución local de (P), entonces $J''(\bar{u})v^2 \geq 0$ $\forall v \in C_{\bar{u}}$.

Teorema. Supongamos que $\kappa > 0$. Si $\bar{u} \in U_{ad}$ satisface la condición de optimalidad de primer orden y $J''(\bar{u})v^2 > 0 \forall v \in C_{\bar{u}} \setminus \{0\}$, entonces existen $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ tal que

$$J(\bar{u}) + \frac{\delta}{2} \|u - \bar{u}\|_{L^2(Q)}^2 \leq J(u) \quad \forall u \in U_{ad} : \|u - \bar{u}\|_{L^2(Q)} \leq \varepsilon.$$



Back

Close

Caso $\kappa = 0$ y $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$

- El cono extendido: dado $\tau > 0$ se definen los conos

$$E_{\bar{u}}^{\tau} = \left\{ v \in L^2(Q) : J'(\bar{u})v \leq \tau \|z_v\|_{L^2(\Omega)} \text{ y } v(x, t) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \alpha \\ \leq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \beta \end{cases} \right\}$$

$$G_{\bar{u}}^{\tau} = \left\{ v \in L^2(Q) : v(x, t) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \alpha \\ \leq 0 & \text{si } \bar{u}(x, t) = \beta \\ = 0 & \text{si } |\bar{\varphi}(x, t) + \kappa \bar{u}(x, t)| \geq \tau \end{cases} \right\}$$

$$C_{\bar{u}}^{\tau} = E_{\bar{u}}^{\tau} \cap G_{\bar{u}}^{\tau}$$

Teorema. Si $\bar{u} \in U_{ad}$ satisface la condición de optimalidad de primer orden y existen $\nu > 0$ y $\tau > 0$ tal que $J''(\bar{u})v^2 \geq \nu \|z_v\|_{L^2(Q)}^2 \quad \forall v \in C_{\bar{u}}^{\tau}$, entonces existen $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ tal que

$$J(\bar{u}) + \frac{\delta}{2} \|y_u - \bar{y}\|_{L^2(Q)}^2 \leq J(u) \quad \forall u \in U_{ad} : \|y_u - \bar{y}\|_{L^{\infty}(Q)} \leq \varepsilon.$$



Back

Close

Aproximación Numérica

Aquí supondremos que Ω es un conjunto convexo

Consideramos una familia quasi-uniforme de triangulaciones $\{\mathcal{K}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ y una partición quasi-uniforme de $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_\tau} = T$.

Denotamos $\bar{\Omega}_h = \cup_{K \in \mathcal{K}_h} K$, N_h y $N_{I,h}$ el número de nodos y nodos interiores de $\mathcal{K}_h$, $I_k = (t_{k-1}, t_k)$, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $\tau = \max_{1 \leq k \leq N_\tau} \tau_k$ y $\sigma = (h, \tau)$.

Suponemos que cada nodo frontera de Ω_h es un punto de Γ . Además suponemos que $\text{dist}(x, \Gamma) \leq C_\Gamma h^2$ para cada $x \in \Gamma_h = \partial\Omega_h$. Bajo esta hipótesis tenemos que

$$|\Omega \setminus \Omega_h| \leq Ch^2$$

Estados Discretos



$$Y_h = \{y_h \in C_0(\bar{\Omega}) : y_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}_h\}$$

$$\mathcal{Y}_\sigma = \{y_\sigma \in L^2(0, T; Y_h) : y_{\sigma|I_k} \in Y_h \quad \forall k = 1, \dots, N_\tau\}$$

Los elementos de $\mathcal{Y}_\sigma$ pueden escribirse como sigue

$$y_\sigma = \sum_{k=1}^{N_\tau} y_{h,k} \chi_k = \sum_{k=1}^{N_\tau} \sum_{j=1}^{N_{I,h}} y_{j,k} e_j \chi_k$$

donde $\{e_j\}_{j=1}^{N_{I,h}}$ es la base nodal asociada con los nodos interiores $\{x_j\}_{j=1}^{N_{I,h}}$ de la triangulación y χ_k denota la función característica del intervalo $I_k = (t_{k-1}, t_k)$.



Ecuación de Estado Discreta

Para cada $u \in L^2(Q)$, definimos su estado discreto asociado como el único elemento $y_\sigma(u) \in \mathcal{Y}_\sigma$ tal que

- $$\int_{\Omega_h} \frac{y_{h,k} - y_{h,k-1}}{\tau_k} z_h dx + \int_{\Omega_h} \nabla y_{h,k} \nabla z_h dx + \int_{\Omega_h} f(y_{h,k}) z_h dx$$

$$= \frac{1}{\tau_k} \int_{I_k} \int_{\Omega_h} u z_h dx dt \quad \forall z_h \in Y_h \text{ and all } k = 1, \dots, N_\tau$$
- $$\int_{\Omega_h} y_{h,0} z_h dx = \int_{\Omega_h} y_0 z_h dx \quad \forall z_h \in Y_h$$

$$\|y_u - y_\sigma(u)\|_{L^2(\Omega_h \times (0,T))} \leq C(\tau + h^2) \|y_u\|_{H^{2,1}(Q)}$$

Controles Discretos

$$U_h = \{v_h \in L^2(\Omega_h) : u_{h|K} \in P_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}_h\}$$

$$\mathcal{U}_\sigma = \{u_\sigma \in L^2(0, T; U_h) : u_{\sigma|I_k} \in U_h \quad \forall k = 1, \dots, N_\tau\}$$

Los elementos de $\mathcal{U}_\sigma$ se pueden escribir como sigue

$$u_\sigma = \sum_{k=1}^{N_\tau} u_{h,k} \chi_k = \sum_{k=1}^{N_\tau} \sum_{K \in \mathcal{K}_h} u_{K,k} \chi_K \chi_k$$



Back

Close

El Problema de Control Discreto

$$(P_\sigma) \quad \min_{u_\sigma \in U_{\sigma,ad}} J_\sigma(u_\sigma)$$

$$J_\sigma(u_\sigma) = \frac{\gamma_Q}{2} \int_{Q_h} |y_\sigma(u_\sigma) - y_Q|^2 dx dt + \frac{\gamma_\Omega}{2} \int_{\Omega_h} |y_{h,N_\tau}(u_\sigma) - y_\Omega|^2 dx \\ + \frac{\kappa}{2} \|u_\sigma\|_{L^2(Q_h)}^2$$

$$U_{\sigma,ad} = \{u_\sigma \in \mathcal{U}_\sigma : \alpha \leq u_{K,k} \leq \beta, \quad \forall K \in \mathcal{K}_h, \quad k = 1, \dots, N_\tau\}$$



Back

Close

Análisis de la Convergencia $\kappa > 0$

Teorema. Para cada σ sea $\bar{u}_\sigma$ una solución de (P_σ) . Entonces, existen subsucesiones de $\{\bar{u}_\sigma\}_\sigma$, denotadas en la misma forma, convergiendo débilmente en $L^2(Q)$. Si $\bar{u}_\sigma \rightharpoonup \bar{u}$ débilmente en $L^2(Q)$, entonces $\bar{u}$ es una solución de (P) y

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} J_\sigma(\bar{u}_\sigma) = J(\bar{u}) = \inf (P) \text{ and } \lim_{\sigma \rightarrow 0} \|\bar{u}_\sigma - \bar{u}\|_{L^2(Q_h)} = 0$$

Recíprocamente, sea $\bar{u}$ un mínimo local estricto de (P) . Entonces, existen $\varepsilon_0 > 0$, $h_0 > 0$ y $\tau_0 > 0$ tal que (P_σ) tiene un mínimo local $\bar{u}_\sigma \in B_{\varepsilon_0}(\bar{u})$ con $J_\sigma(\bar{u}_\sigma) \leq J_\sigma(u_\sigma) \forall u_\sigma \in B_{\varepsilon_0}(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_\sigma$, para cada $h < h_0$, $\tau < \tau_0$. Además, las convergencias de arriba se cumplen.

Estimaciones del Error $\kappa > 0$

Teorema. Sea $\bar{u}$ una solución local de (P) tal que $J''(\bar{u})v^2 > 0$ $\forall v \in C_{\bar{u}} \setminus \{0\}$ y sea $\bar{u}_\sigma$ la solución local de (P_σ) descrita en la segunda parte del teorema previo. Supongamos que existe $h_1 > 0$ tal que $y_d \in L^\infty(Q \setminus Q_h) \forall h \leq h_1$. Entonces, para cada $h \leq \min\{h_1, h_0\}$ se satisface

$$\|\bar{u}_\sigma - \bar{u}\|_{L^2(Q_h)} \leq C(\sqrt{\tau} + h)$$

Controles Sparse



$$(P) \quad \min_{u \in U_{ad}} J(u)$$

$$\begin{aligned} J(u) = & \frac{\gamma_Q}{2} \int_Q (y_u - y_Q)^2 \, dx \, dt + \frac{\gamma_\Omega}{2} \int_\Omega (y_u(T) - y_\Omega)^2 \, dx \\ & + \frac{\kappa}{2} \int_Q u^2 \, dx \, dt + \nu \int_\Omega \|u(t)\|_{L^2(0,T)} \, dt \end{aligned}$$

Suponemos que $\nu > 0$ y $-\infty < \alpha < 0 < \beta < +\infty$

Notación:

$$j(u) = \int_\Omega \|u(t)\|_{L^2(0,T)}$$



Back

Close

Condiciones de Optimalidad

Teorema. Si $\bar{u}$ es un mínimo local de (P), entonces existen $\bar{y}, \bar{\varphi} \in L^\infty(Q) \cap W(0, T)$ y $\bar{\lambda} \in \partial j(\bar{u})$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + f(\bar{y}) = \bar{u} & \text{en } Q \\ \bar{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \bar{y}(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \Delta \bar{\varphi} + f'(\bar{y})\bar{\varphi} = \bar{y} - y_Q & \text{en } Q \\ \bar{\varphi} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \bar{\varphi}(T) = \bar{y}(T) - y_\Omega & \text{en } \Omega \end{cases}$$

$$\int_Q (\bar{\varphi} + \kappa \bar{u} + \nu \bar{\lambda})(u - \bar{u}) \, dx \, dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

Estructura Sparse de $\bar{u}$

Corolario. Sean $\bar{u}$, $\bar{\varphi}$ y $\bar{\lambda}$ como en el Teorema previo, entonces

$$\text{Si } \kappa > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, t) = \text{Proj}_{[\alpha, \beta]} \left(-\frac{1}{\kappa} [\bar{\varphi}(x, t) + \nu \bar{\lambda}(x, t)] \right) \\ \|\bar{u}(x)\|_{L^2(0, T)} = 0 \Leftrightarrow \|\bar{\varphi}(x)\|_{L^2(0, T)} \leq \nu \end{array} \right.$$

$$\text{Si } \kappa = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\bar{\varphi}(x)\|_{L^2(0, T)} < \nu \Rightarrow \|\bar{u}(x)\|_{L^2(0, T)} = 0 \\ \|\bar{u}(x)\|_{L^2(0, T)} = 0 \Rightarrow \|\bar{\varphi}(x)\|_{L^2(0, T)} \leq \nu \end{array} \right.$$

Estructura Sparse en Tiempo

$$(P) \min_{u \in U_{ad}} J(u)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \|y_u(t) - y_d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ + \nu \int_0^\infty \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \quad (\kappa, \nu > 0)$$

$$\|\bar{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \|\bar{\varphi}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \nu$$

- Since $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\varphi}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, entonces existe $T^* < \infty$ tal que $\bar{u}(t) = 0$ para $t \geq T^*$.



Back

Close