Grupo de Investigación:

Control y Optimización

Eduardo Casas

Universidad de Cantabria
Santander, Spain
eduardo.casas@unican.es

Equipo Investigador

•Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación:

- Eduardo Casas

•Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación:

- Luis Alberto Fernández
- Cecilia Pola

•Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo:

- Mariano Mateos

Líneas de Investigación

• **Control Óptimo de Ecuaciones en Derivadads Parciales:** análisis teórico y numérico de edps, control de edps lineales y no lineales (ecuaciones semilineales y cuasilineales, ecuaciones de Navier-Stokes), existencia de controles óptimos, condiciones de optimalidad de primer y segundo orden, aproximación numérica (convergencia, estimaciones del error, algoritmos numéricos), propiedades de estabilidad, controles sparse, problemas con horizonte infinito.

• **Aplicationes en Oncología:** Control óptimo de problemas asociados a ecuaciones ordinarias o en derivadas parciales que aparecen cuando se modeliza el crecimiento de tumores y su tratamiento quimioterapéutico, tomando en consideración diferentes farmacodinámicas.

Control Óptimo de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Un Típico Problema de Control

$$\text{(P)} \quad \min_{u \in U_{ad}} J(u)$$

$$J(u) = \frac{\gamma_Q}{2} \int_Q (y_u - y_Q)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{\gamma_\Omega}{2} \int_\Omega (y_u(T) - y_\Omega)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\kappa}{2} \int_Q u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$\gamma_Q, \gamma_\Omega, \kappa \geq 0$ y $\gamma_Q + \gamma_\Omega > 0$

$$U_{ad} = \{u \in L^2(Q) : \alpha \leq u(x,t) \leq \beta \text{ a.e. in } Q\}$$

$-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ e y_u es la solución de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = u & \text{en } Q = \Omega \times (0,T) \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T), & y(0) = y_0 \text{ en } \Omega \end{array} \right.$$

Back
Close

Hipótesis

- $y_Q \in L^r(0,T;L^p(\Omega))$ con $r,p \geq 2$ y $\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} < 1$, $y_\Omega, y_0 \in L^\infty(\Omega)$
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 satisfaciendo

$$\exists C_f \in \mathbb{R} \text{ tal que } f'(y) \geq C_f \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Teorema. Para cada $u \in L^2(Q)$ la ecuación de estado posee una única solución $y_u \in W(0,T) = L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|y_u\|_{W(0,T)} + \|f(y_u)\|_{L^2(Q)} \leq C\Big(|f(0)| + \|u\|_{L^2(Q)} + \|y_0\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)$$

Si además $u \in L^r(0,T;L^p(\Omega))$ con $r,p \geq 2$ y $\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} < 1$, entonces $y_u \in L^\infty(Q)$. Finalmente, si $u_k \rightharpoonup u$ en $L^2(Q)$, entonces $y_{u_k} \rightharpoonup y_u$ en $W(0,T)$ y $f(y_{u_k}) \rightharpoonup f(y_u)$ en $L^2(Q)$.

Existencia de Solución de (P)

Teorema. Si $\kappa > 0$ o $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, entonces (P) posee al menos una solución. Además, cada solución local es una función de $L^\infty(Q)$.

Diferenciabilidad de la Función $u \to y_u$

• Sea $G : L^r(0,T;L^p(\Omega)) \longrightarrow L^\infty(Q) \cap W(0,T)$ la aplicación definida por $G(u) = y_u$, con $r, p \geq 2$ y $\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} < 1$.

Teorema. La aplicación G es de clase C^2. Para cada u, v, v_1, y v_2 pertenecientes a $L^r(0,T;L^p(\Omega))$ las derivadas $z_v = G'(u)v$ y $z_{v_1,v_2} = G''(u)(v_1,v_2)$ son las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_v}{\partial t} - \Delta z_v + f'(y_u) z_v = v \ \text{ en } Q \\ z_v = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad z_v(0) = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_{v_1,v_2}}{\partial t} - \Delta z_{v_1,v_2} + f'(y_u) z_{v_1,v_2} + f''(y_u) z_{v_1} z_{v_2} = 0 \ \text{ en } Q \\ z_{v_1,v_2} = 0 \text{ sobre } \Sigma \quad z_{v_1,v_2}(0) = 0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Diferenciabilidad de J

Corolario. La función $J : L^r(0,T;L^p(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 y sus derivadas vienen dadas por las fórmulas

$$J'(u)v = \int_Q (\varphi_u + \kappa u)v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$J''(u)(v_1,v_2) = \int_Q \Big[\big(1 - f''(y_u)\varphi_u\big) z_{v_1} z_{v_2} + \kappa v_1 v_2\Big] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

donde $z_{v_i} = G'(u)v_i$, $i = 1, 2$, y $\varphi_u \in L^\infty(\Omega) \cap W(0,T)$ es la solución de la ecuación de estado adjunto

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi + f'(y_u)\varphi = \gamma_Q(y_u - y_Q) \ \text{ in } Q, \\ \varphi = 0 \text{ on } \Sigma, \quad \varphi(T) = \gamma_\Omega(y_u - y_\Omega) \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

UC
University of Cantabria

Condiciones de Optimalidad de Primer Orden

Teorema. Para cada solución local $\bar{u}$ de (P) existen $\bar{y}, \bar{\varphi} \in W(0,T) \cap L^\infty(Q)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + f(\bar{y}) = \bar{u} \ \text{ en } Q \\ \bar{y} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \bar{y}(0) = y_0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \Delta \bar{\varphi} + f'(\bar{y})\bar{\varphi} = \gamma_Q(\bar{y} - y_Q) \ \text{ en } Q \\ \bar{\varphi} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \bar{\varphi}(T) = \gamma_\Omega(\bar{y}(T) - y_\Omega) \text{ en } \Omega \end{cases}$$

$$\int_Q (\bar{\varphi} + \kappa \bar{u})(u - \bar{u}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

Consecuencias

Corolario. Supongamos que $\bar{u} \in U_{ad}$ y $\bar{\varphi}$ satisfacen las condiciones de optimalidad de primer orden. Entonces,

$$\text{Si } \kappa > 0 \Rightarrow \bar{u}(x,t) = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\Big(-\frac{1}{\kappa}\bar{\varphi}(x,t)\Big)$$

$$\text{Si } \kappa = 0 \Rightarrow \bar{u}(x,t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \bar{\varphi}(x,t) > 0 \\ \beta & \text{si } \bar{\varphi}(x,t) < 0 \end{cases}$$

Además,

- si $\kappa > 0$ y $\gamma_\Omega = 0$ o $y_\Omega \in H_0^1(\Omega)$, entonces $\bar{u} \in H^1(Q)$
- si $\kappa = 0$ y $|\{(x,t) \in Q : \bar{\varphi}(x,t) = 0\}| = 0$, entonces

  $\bar{u}(x,t) \in \{\alpha, \beta\}$ a.e. en Q (Control bang-bang)

El Cono de Direcciones Criticas

$$C_{\bar{u}} = \left\{ v \in L^2(Q) : J'(\bar{u})v = 0 \text{ y } v(x,t) \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \text{ si } \bar{u}(x,t) = \alpha \\ \leq 0 \text{ si } \bar{u}(x,t) = \beta \end{array} \right. \right\}$$

Equivalentemente,

$$C_{\bar{u}} = \left\{ v \in L^2(Q) : v(x,t) \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \text{ si } \bar{u}(x,t) = \alpha \\ \leq 0 \text{ si } \bar{u}(x,t) = \beta \\ = 0 \text{ si } \bar{\varphi}(x,t) + \kappa\bar{u}(x,t) \neq 0 \end{array} \right. \right\}$$

Condiciones de Optimalidad de Segundo Orden

UC University of Cantabria

Teorema. Si $\bar{u}$ es una solución local de (P), entonces $J''(\bar{u})v^2 \geq 0$ $\forall v \in C_{\bar{u}}$.

Teorema. Supongamos que $\kappa > 0$. Si $\bar{u} \in U_{ad}$ satisface la condición de optimalidad de primer orden y $J''(\bar{u})v^2 > 0 \; \forall v \in C_{\bar{u}} \setminus \{0\}$, entonces existen $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ tal que

$$J(\bar{u}) + \frac{\delta}{2}\|u - \bar{u}\|^2_{L^2(Q)} \leq J(u) \quad \forall u \in U_{ad} : \|u - \bar{u}\|_{L^2(Q)} \leq \varepsilon.$$

Caso $\kappa = 0$ y $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$

• El cono extendido: dado $\tau > 0$ se definen los conos

$$E^\tau_{\bar u} = \left\{ v \in L^2(Q) : J'(\bar u)v \le \tau \|z_v\|_{L^2(\Omega)} \text{ y } v(x,t) \left\{ \begin{array}{ll} \ge 0 & \text{si } \bar u(x,t) = \alpha \\ \le 0 & \text{si } \bar u(x,t) = \beta \end{array} \right. \right\}$$

$$G^\tau_{\bar u} = \left\{ v \in L^2(Q) : v(x,t) \left\{ \begin{array}{ll} \ge 0 & \text{si } \bar u(x,t) = \alpha \\ \le 0 & \text{si } \bar u(x,t) = \beta \\ = 0 & \text{si } |\bar\varphi(x,t) + \kappa \bar u(x,t)| \ge \tau \end{array} \right. \right\}$$

$$C^\tau_{\bar u} = E^\tau_{\bar u} \cap G^\tau_{\bar u}$$

Teorema. Si $\bar u \in U_{ad}$ satisface la condición de optimalidad de primer orden y existen $\nu > 0$ y $\tau > 0$ tal que $J''(\bar u)v^2 \ge \nu \|z_v\|^2_{L^2(Q)}$ $\forall v \in C^\tau_{\bar u}$, entonces existen $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ tal que

$$J(\bar u) + \frac{\delta}{2}\|y_u - \bar y\|^2_{L^2(Q)} \le J(u) \quad \forall u \in U_{ad} : \|y_u - \bar y\|_{L^\infty(Q)} \le \varepsilon.$$

UC

University of Cantabria

Aproximación Numérica

Aquí supondremos que Ω es un conjunto convexo

Consideramos una familia quasi-uniforme de triangulaciones $\{\mathcal{K}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ y una partición quasi-uniforme de $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_\tau} = T$.

Denotamos $\bar{\Omega}_h = \cup_{K \in \mathcal{K}_h} K$, N_h y $N_{I,h}$ el número de nodos y nodos interiores de $\mathcal{K}_h$, $I_k = (t_{k-1}, t_k)$, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $\tau = \max_{1 \le k \le N_\tau} \tau_k$ y $\sigma = (h, \tau)$.

Suponemos que cada nodo frontera de Ω_h es un punto de Γ. Sdemás suponemos que $dist(x, \Gamma) \le C_\Gamma h^2$ para cada $x \in \Gamma_h = \partial\Omega_h$. Bajo esta hipótesis tenemos que

$$|\Omega \setminus \Omega_h| \le C h^2$$

UC
University
of Cantabria

Estados Discretos

$$Y_h = \{y_h \in C_0(\bar{\Omega}) : \; y_{h|K} \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}_h\}$$

$$\mathcal{Y}_\sigma = \{y_\sigma \in L^2(0,T;Y_h) : y_{\sigma|I_k} \in Y_h \; \forall k = 1,\ldots,N_\tau\}$$

Los elementos de $\mathcal{Y}_\sigma$ pueden escribirse como sigue

$$y_\sigma = \sum_{k=1}^{N_\tau} y_{h,k}\chi_k = \sum_{k=1}^{N_\tau}\sum_{j=1}^{N_{I,h}} y_{j,k}e_j\chi_k$$

donde $\{e_j\}_{j=1}^{N_{I,h}}$ es la base nodal asociada con los nodos interiores $\{x_j\}_{j=1}^{N_{I,h}}$ de la triangulaión y χ_k denota la función característica del intervalo $I_k = (t_{k-1}, t_k)$.

Back
Close

UC

University of Cantabria

Ecuación de Estado Discreta

Para cada $u \in L^2(Q)$, definimos su estado discreto asociado como el único elemento $y_\sigma(u) \in \mathcal{Y}_\sigma$ tal que

- $$\int_{\Omega_h} \frac{y_{h,k} - y_{h,k-1}}{\tau_k} z_h dx + \int_{\Omega_h} \nabla y_{h,k} \nabla z_h dx + \int_{\Omega_h} f(y_{h,k}) z_h dx$$
$$= \frac{1}{\tau_k} \int_{I_k} \int_{\Omega_h} u z_h dx dt \quad \forall z_h \in Y_h \text{ and all } k = 1, \ldots, N_\tau$$
- $$\int_{\Omega_h} y_{h,0} z_h dx = \int_{\Omega_h} y_0 z_h dx \quad \forall z_h \in Y_h$$

$$\boxed{\|y_u - y_\sigma(u)\|_{L^2(\Omega_h \times (0,T))} \leq C(\tau + h^2) \|y_u\|_{H^{2,1}(Q)}}$$

Controles Discretos

$$U_h = \{v_h \in L^2(\Omega_h) : \; u_{h|K} \in P_0(K) \;\; \forall K \in \mathcal{K}_h\}$$

$$\mathcal{U}_\sigma = \{u_\sigma \in L^2(0,T;U_h) : \; u_{\sigma|I_k} \in U_h \; \forall k = 1, \ldots, N_\tau\}$$

Los elementos de $\mathcal{U}_\sigma$ se pueden escribir como sigue

$$u_\sigma = \sum_{k=1}^{N_\tau} u_{h,k}\chi_k = \sum_{k=1}^{N_\tau} \sum_{K \in \mathcal{K}_h} u_{K,k}\chi_K\chi_k$$

El Problema de Control Discreto

$$(\mathrm{P}_\sigma) \quad \min_{u_\sigma \in U_{\sigma,ad}} J_\sigma(u_\sigma)$$

$$\begin{aligned} J_\sigma(u_\sigma) = \frac{\gamma_Q}{2} \int_{Q_h} |y_\sigma(u_\sigma) - y_Q|^2 \, dx \, dt + \frac{\gamma_\Omega}{2} \int_{\Omega_h} |y_{h,N_\tau}(u_\sigma) - y_\Omega|^2 \, dx \\ + \frac{\kappa}{2} \|u_\sigma\|^2_{L^2(Q_h)} \end{aligned}$$

$$U_{\sigma,ad} = \{u_\sigma \in \mathcal{U}_\sigma : \alpha \le u_{K,k} \le \beta, \ \forall K \in \mathcal{K}_h, \ k = 1, \ldots, N_\tau\}$$

UC
University of Cantabria

Análisis de la Convergencia $\kappa > 0$

Teorema. Para cada σ sea $\bar{u}_\sigma$ una solución de (P_σ). Entonces, existen subsucesiones de $\{\bar{u}_\sigma\}_\sigma$, denotadas en la misma forma, convergiendo débilmente en $L^2(Q)$. Si $\bar{u}_\sigma \rightharpoonup \bar{u}$ débilmente en $L^2(Q)$, entonces $\bar{u}$ es unaa solución de (P) y

$$\lim_{\sigma \to 0} J_\sigma(\bar{u}_\sigma) = J(\bar{u}) = \inf (\mathrm{P}) \text{ and } \lim_{\sigma \to 0} \|\bar{u}_\sigma - \bar{u}\|_{L^2(Q_h)} = 0$$

Reciprocamente, sea $\bar{u}$ un mínimo local estricto of (P). Entonces, existen $\varepsilon_0 > 0$, $h_0 > 0$ y $\tau_0 > 0$ tal que (P_σ) tiene un mínimo local $\bar{u}_\sigma \in B_{\varepsilon_0}(\bar{u})$ con $J_\sigma(\bar{u}_\sigma) \leq J_\sigma(u_\sigma)$ $\forall u_\sigma \in B_{\varepsilon_0}(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_\sigma$, para cada $h < h_0$, $\tau < \tau_0$. Además, las convergencias de arriba se cumplen.

Estimaciones del Error $\kappa > 0$

Teorema. Sea $\bar{u}$ una solución local de (P) tal que $J''(\bar{u})v^2 > 0$ $\forall v \in C_{\bar{u}} \setminus \{0\}$ y sea $\bar{u}_\sigma$ la soluión local de (P_σ) descrita en la segunda parte del teorema previo. Supongamos que existe $h_1 > 0$ tal que $y_d \in L^\infty(Q \setminus Q_h)$ $\forall h \leq h_1$. Entonces, para cada $h \leq \min\{h_1, h_0\}$ se satisface

$$\boxed{\|\bar{u}_\sigma - \bar{u}\|_{L^2(Q_h)} \leq C(\sqrt{\tau} + h)}$$

UC
University of Cantabria

Back
Close

Controles Sparse

$$(\mathrm{P}) \quad \min_{u \in U_{ad}} J(u)$$

$$J(u) = \frac{\gamma_Q}{2} \int_Q (y_u - y_Q)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \frac{\gamma_\Omega}{2} \int_\Omega (y_u(T) - y_\Omega)^2 \, \mathrm{d}x$$
$$+ \frac{\kappa}{2} \int_Q u^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \nu \int_\Omega \|u(t)\|_{L^2(0,T)} \, \mathrm{d}t$$

Suponemos que $\nu > 0$ y $-\infty < \alpha < 0 < \beta < +\infty$

Notación:

$$j(u) = \int_\Omega \|u(t)\|_{L^2(0,T)}$$

Condiciones de Optimalidad

Teorema. Si $\bar u$ es un mínimo local de (P), entonces existen $\bar y, \bar\varphi \in L^\infty(Q) \cap W(0,T)$ y $\bar\lambda \in \partial j(\bar u)$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \bar y}{\partial t} - \Delta \bar y + f(\bar y) & = & \bar u & \text{en } Q \\ \bar y & = & 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \bar y(0) & = & y_0 & \text{en } \Omega \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \bar\varphi}{\partial t} - \Delta \bar\varphi + f'(\bar y)\bar\varphi & = & \bar y - y_Q & \text{en } Q \\ \bar\varphi & = & 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \bar\varphi(T) & = & \bar y(T) - y_\Omega & \text{en } \Omega \end{array}\right.$$

$$\int_Q (\bar\varphi + \kappa \bar u + \nu \bar\lambda)(u - \bar u)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

Back
Close

UC
University of Cantabria

Estructura Sparse de $\bar{u}$

Corolario. Sean $\bar{u}$, $\bar{\varphi}$ y $\bar{\lambda}$ como en el Teorema previo, entonces

$$\text{Si } \kappa > 0 \quad \begin{cases} \bar{u}(x,t) = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\Big(-\dfrac{1}{\kappa}[\bar{\varphi}(x,t) + \nu\,\bar{\lambda}(x,t)]\Big) \\ \|\bar{u}(x)\|_{L^2(0,T)} = 0 \Leftrightarrow \|\bar{\varphi}(x)\|_{L^2(0,T)} \leq \nu \end{cases}$$

$$\text{Si } \kappa = 0 \quad \begin{cases} \|\bar{\varphi}(x)\|_{L^2(0,T)} < \nu \Rightarrow \|\bar{u}(x)\|_{L^2(0,T)} = 0 \\ \|\bar{u}(x)\|_{L^2(0,T)} = 0 \Rightarrow \|\bar{\varphi}(x)\|_{L^2(0,T)} \leq \nu \end{cases}$$

UC
University of Cantabria

Estructura Sparse en Tiempo

$$\text{(P)} \quad \min_{u \in U_{ad}} J(u)$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \|y_u(t) - y_d(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\kappa}{2}\int_0^\infty \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$+ \nu \int_0^\infty \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \quad (\kappa, \nu > 0)$$

$$\boxed{\|\bar{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \|\bar{\varphi}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \nu}$$

- Since $\lim_{t\to\infty} \|\bar{\varphi}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, entonces existe $T^* < \infty$ tal que $\bar{u}(t) = 0$ para $t \geq T^*$.