# Lógica modal, topología y sistemas dinámicos

David Fernández Duque

Universidad de Sevilla

Grupo de Lógica, Lenguaje e Información

# Introducción

La interpretación ‘estándar’ de la lógica proposicional asigna uno de dos valores (digamos ‘0’ y ‘1’) interpretados como ‘falso’ y ‘verdadero’, a cada variable proposicional. A fórmulas más complejas se les asigna también uno de estos dos valores, siguiendo las bien conocidas tablas de verdad para los operadores booleanos.

# Introducción

Bajo esta interpretación, una fórmula es válida (es decir, obtiene el valor de 1 independientemente de la asignación de valores a las variables proposicionales) si y sólo si es un teorema de la lógica clásica proposicional.

# Interpretaciones en $\mathcal{P}(X)$

Una generalización posible es asignar a cada fórmula un subconjunto de algún conjunto dado $X$; es decir, a cada variable proposicional $p$ se le asigna un conjunto $V(p) \subset X$, y extendemos $V$ a fórmulas más complejas con las reglas

$$\begin{aligned}
V(\alpha \vee \beta) &= V(\alpha) \cup V(\beta) \\
V(\alpha \wedge \beta) &= V(\alpha) \cap V(\beta) \\
V(\alpha \to \beta) &= (X \setminus V(\alpha)) \cup V(\beta).
\end{aligned}$$

# Interpretaciones en $\mathcal{P}(X)$

Sin embargo, esta generalización no parece demasiado útil, ya que el conjunto de fórmulas válidas es exactamente el mismo que si utilizamos nuestra interpretación de ‘0’ y ‘1’.

Esta situación cambia si ampliamos un poco la expresividad de nuestro lenguaje.

# La lógica modal $\mathcal{S}4$

Consideremos el lenguaje de la lógica modal, la cual agrega al lenguaje proposicional un operador unitario $\Box$ (y su dual, $\Diamond$, definido por $\neg\Box\neg$).

# El sistema deductivo de $\mathcal{S}4$

$\mathcal{S}4$ tiene por axiomas todas las tautologías clásicas proposicionales y la regla modus ponens, además de los axiomas modales

$$\Box\alpha \to \alpha$$

$$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$$

$$\Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$$

y la regla

$$\frac{\alpha}{\Box\alpha}.$$

# Espacios topológicos

McKinsey y Tarski definieron una semántica topológica para $\mathcal{S}4$ alrededor de 1940.
Recordemos que si $X$ es un conjunto, una topología sobre $X$ es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de $X$, llamados *abiertos*, tal que

- $\varnothing \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$,
- si $U, V \in \mathcal{T}$, entonces $U \cap V$ es abierto;
- si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos, entonces
$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}.$$

# Semántica topológica

Podemos usar espacios topológicos para dar una semántica a fórmulas de $\mathcal{S}4$. Comenzamos, como antes, asignando un subconjunto $V(p) \subseteq X$ a cada variable proposicional y evaluando operadores booleanos de manera estándar; pero ahora, definimos

$$V(\Box\varphi) = V(\varphi)^{\circ};$$

es decir, le asignamos a $\Box\varphi$ el *interior topológico* de $V(\varphi)$.

# Completud

Tenemos el siguiente resultado para semántica topológica:

**Teorema 1.** *Para toda fórmula* $\varphi$ *en el lenguaje de* $\mathcal{S}4$*,* $\vdash \varphi$ *sí y sólo sí, para todo modelo topológico*

$$\langle X, \mathcal{T}, V \rangle \, ,$$

*tenemos que* $V(\varphi) = X$.

# Interpretaciones de Kripke

Quizá mejor conocida que la interpretación topológica para la lógica modal es la interpretación de Kripke.

Ahora, en vez de espacios topológicos consideramos marcos. Un *marco* consiste en una pareja $\langle W, \preccurlyeq \rangle$, donde $W$ es un conjunto y $\preccurlyeq$ es un preorden sobre $W$.

# Interpretaciones de Kripke

Para interpretar fórmulas necesitamos, como antes, una valuación $V$ que asigna a cada variable proposicional $p$ un conjunto $V(p) \subset W$. Los operadores booleanos se interpretan de la misma manera, y ahora definimos

$$V(\Box\alpha) = \{w \in W : \forall v \preccurlyeq w, v \in V(\alpha)\}.$$

## Kripke vs. interpretaciones topológicas

¿Qué relación hay entre estas dos interpretaciones?

En realidad, la interpretación de Kripke se puede ver como un caso particular de la semántica topológica. Esto se relaciona con los *espacios de Aleksandroff*, los cuales son espacios topológicos donde las intersecciones arbitrarias (no sólo finitas) de conjuntos abiertos son abiertas.

## Kripke vs. interpretaciones topológicas

Para ver esto, supongamos que tenemos un marco $\langle W, \preccurlyeq \rangle$. Definamos una topología $\mathcal{T}$ sobre $W$ diciendo que un conjunto $U$ es abierto sí y sólo sí, siempre que $w \in U$ y $v \preccurlyeq w$, se sigue que $v \in U$. La interpretación de fórmulas usando $\preccurlyeq$ o usando $\mathcal{T}$ es exactamente la misma, y el espacio resultante es una topología de Aleksandroff.

## Kripke vs. interpretaciones topológicas

Por otro lado, supongamos que tenemos un espacio con una topología Aleksandroff, $\langle X, \mathcal{T} \rangle$. Dado un punto $x$, consideremos el conjunto

$$U_x = \bigcap \{U : x \in U \in \mathcal{T}\} .$$

El conjunto $U_x$ es abierto, ya que el espacio es Aleksandroff, y de hecho es la vecindad más pequeña de $x$.

# Kripke vs. interpretaciones topológicas

Definamos un preorden, $\preccurlyeq$, por

$$y \preccurlyeq x \Leftrightarrow y \in U_x.$$

Esto nos da un marco de Kripke, y de nuevo uno puede verificar que las interpretaciones topológicas y de Kripke de cada sentencia coinciden.

# Lógica topológica y topología

A pesar de que la semántica de Kripke se puede ver como un caso particular de la semántica topológica, $\mathcal{S}4$ también es completo para los marcos de Kripke y por lo tanto la semántica topológica no es necesaria para entender $\mathcal{S}4$, tal como lo hemos presentado.

Nos podríamos preguntar, por otro lado, qué es lo que $\mathcal{S}4$ nos puede decir acerca de los espacios topológicos más utilizados en matemáticas, por ejemplo, la recta de los reales.

# $\mathcal{S}4(\mathbb{R})$

Un teorema de Tarski y Banach nos muestra que el poder expresivo de $\mathcal{S}4$ no es capaz de distinguir a los reales de otros espacios topológicos:

**Teorema 2** (Tarski, McKinsey)**.** *Toda fórmula satisfacible de $\mathcal{S}4$ puede ser satisfecha en un modelo topológico basado en $\mathbb{R}$.*

Esto nos indica que para expresar alguna propiedad no trivial de la topología de los números reales es necesario aumentar el poder expresivo. Afortunadamente no tenemos que aumentarlo demasiado para comenzar a encontrar resultados interesantes.

# El sistema $\mathcal{S}4\mathcal{C}$

Artemov et. al. introdujeron una extensión de $\mathcal{S}4$ para hablar no de espacios topológicos a secas, sino de espacios dinámicos topológicos; éstos consisten en una pareja $\langle X, f \rangle$ formada por un espacio topológico $X$ y una función $f : X \to X$.

En general supondremos que $f$ es una función continua arbitraria, pero también podríamos considerar el caso en que $f$ fuera un homeomorfismo, por ejemplo.

# El sistema $\mathcal{S}4\mathcal{C}$

Al lenguaje de $\mathcal{S}4$ le agregaremos una nueva modalidad, $\bigcirc$. La interpretación de $\bigcirc$ está dada por

$$V(\bigcirc\alpha) = f^{-1}V(\alpha).$$

Esto quiere decir que un punto $x \in X$ satisface $\bigcirc\alpha$ sí y sólo sí $f(x)$ satisface $\alpha$.

# Marcos dinámicos de Kripke

De nuevo podemos considearar el caso en que el espacio topológico sea presentado como un marco de Kripke, $\langle W, f \rangle$. En este caso el que $f$ sea continua es equivalente a que sea monótona; es decir, $f$ es continua sí y sólo sí $f(w) \preccurlyeq f(v)$ siempre que $w \preccurlyeq v$.

Una vez mas tenemos un teorema de completitud; una fórmula es válida sí y sólo sí es válida en todo marco dinámico de Kripke.

# $\mathcal{S}4\mathcal{C}(\mathbb{R})$

Por otro lado, el teorema de Tarski-McKinsey no se generaliza a $\mathcal{S}4\mathcal{C}$.
Consideremos la siguiente fórmula:

$$\varphi = (\bigcirc p \rightarrow \Box \bigcirc p) \vee (\Box \bigcirc q \rightarrow \bigcirc \Diamond \Box q).$$

Esta fórmula no es válida en general, pero sí lo es en los reales.

$$(\bigcirc p \to \Box \bigcirc p) \vee (\Box \bigcirc q \to \bigcirc \Diamond \Box q)$$

Para ver que $\varphi$ es válida en $\mathbb{R}$, notemos que dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos clasificar a todos los reales en dos categorías:

- los puntos $x$ tales que $f$ es constante cerca de $x$;
- los puntos $x$ tales que para toda vecindad $U$ de $x$, $f(U)$ contiene un intervalo abierto.

$(\bigcirc p \to \Box \bigcirc p) \vee (\Box \bigcirc q \to \bigcirc \Diamond \Box q)$

Si $f$ es constante cerca de $x$ y $x \in V(\bigcirc p)$, podemos tomar una vecindad $U$ de $x$ tal que $f$ es constante en $U$, y entonces para toda $y \in U$, $f(y) = f(x) \in V(p)$; es decir, $x \in V(\Box \bigcirc p)$.

Por otro lado, si para toda vecindad $U$ de $x$, $f(U)$ contiene un intervalo abierto y $x \in V(\Box \bigcirc q)$, podemos ver que $f(V(q))$ contiene un intervalo abierto en cuya cerradura se encuentra $f(x)$; por lo tanto, $x \in V(\bigcirc \Diamond \Box q)$.

# $\mathcal{S}4\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2\right)$

Ahora la pregunta natural es qué sucede si consideramos un espacio euclideano de mayor dimensión. En este caso tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3** (DFD). *Una fórmula $\varphi$ de $\mathcal{S}4\mathcal{C}$ es satisfacible sí y sólo sí es satisfacible en un modelo basado en* $\mathbb{R}^2$.

# $\mathcal{DTL}$

$\mathcal{S}4\mathcal{C}$ aún no tiene suficiente poder expresivo para distinguir entre marcos de Kripke y espacios topológicos generales.

La razón es que en ningún momento aparecen intersecciones infinitas de conjuntos abiertos en las interpretaciones de fórmulas.

## $\mathcal{DTL}$

La *Lógica Dinámica Topológica* ($\mathcal{DTL}$) altera esto añadiendo un operador infinitario, $*$.
La interpretación de dicho operador es

$$V(*\alpha) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n} V(\alpha),$$

es decir, un punto $x$ satisface $*\alpha$ sí y sólo sí todos los puntos de su órbita

$$\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$$

satisfacen $\alpha$.

# $\mathcal{DTL}$ y marcos de Kripke

En $\mathcal{DTL}$, la satisfacibilidad de fórmulas ya no se puede reducir a la satisfacibilidad en marcos de Kripke. Para ver esto, consideremos la siguiente fórmula:

$$\varphi = *\Box p \rightarrow \Box * \Box p.$$

## $*\Box p \rightarrow \Box * \Box p$

A la izquierda tenemos $*\Box p$, la cual se interpreta por

$$\bigcap_{n \geq 0} f^{-n} V(p)^{\circ},$$

lo cual en cualquier espacio de Aleksandroff es un conjunto abierto. Así que un punto $x$ que satisface $*\Box p$ también satisfarcerá $\Box * \Box p$, ya que el interior de un conjunto abierto es el mismo conjunto.

# Un contraejemplo en $\mathbb{R}$

Por otro lado, esta fórmula no es válida en $\mathbb{R}$. Consideremos el modelo

$$\mathfrak{M} = \langle \mathbb{R}, 2x, V \rangle$$

donde $V(p) = (-1, 1)$.

Entonces, $0 \models *\Box p$, pero $0 \not\models \Box * \Box p$, y concluimos que $\varphi$ no es válida en general.

# Los racionales

En los racionales obtenemos un resultado de completud aún más fuerte que en el caso de $\mathbb{R}^2$. Esto no es sorprendente ya que las propiedades de espacios euclídeos que podemos expresar en $\mathcal{DTL}$ tienen que ver con su completitud métrica y su conexidad.

**Teorema 4** (DFD)**.** *Cualquier fórmula de $\mathcal{DTL}$ que puede ser satisfecha en un sistema dinámico arbitrario puede ser satisfecha en uno basado en $\mathbb{Q}$.*

# Complejidad

Dada una clase de sistemas $\mathcal{A}$, una pregunta general que nos podemos hacer es si hay manera de identificar las fórmulas de $\mathcal{DTL}$ que son válidas en $\mathcal{A}$.

# Resultados ‘negativos’

Los siguientes resultados fueron demostrados por Wolter, Zakharyashev, Konev and Kontchakov:

**Teorema 5.** *El conjunto de fórmulas de $\mathcal{DTL}$ que son válidas cuando $f$ es un homeomorfismo no es recursivamente enumerable;*

**Teorema 6.** *El conjunto de fórmulas de $\mathcal{DTL}$ que son válidas en general no es decidible.*

## Enumerabilidad recursiva de $\mathcal{DTL}$

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:
**Teorema 7** (DFD)**.** $\mathcal{DTL}$ *es recursivamente enumerable.*

Las técnicas que utilizamos para obtener este resultado consisten en reducir modelos dinámicos topológicos a una especie de grafos, los cuales pueden ser infinitos pero son siempre contables.

# Sistemas mínimos

Un sistema dinámico no vacío es *mínimo* si la órbita de cada punto es densa en todo el sistema.

No es difícil encontrar ejemplos de sistemas mínimos; considérese, por ejemplo, una rotación irracional del círculo unitario. Más aún, todo sistema dinámico sobre un espacio compacto contiene un subsistema mínimo.

Si $\mathfrak{M}$ es un modelo dinámico topológico basado en un sistema mínimo,

$$\mathfrak{M} \models \Diamond\Box p \rightarrow \# p.$$

Esta fórmula no es válida en general.

## Decidibilidad para sistemas mínimos

**Teorema 8** (DFD). *$\mathcal{DTL}$ sobre espacios mínimos es decidible; sin embargo, no es decidible en tiempo primitivo recursivo.*

Esta lógica tiene propiedades interesantes; a pesar de ser decidible, carece de la propiedad de modelos finitos, o siquiera localmente finitos.

# Bibliografía


- *D. Fernández*; **Non-deterministic semantics for Dynamic Topological Logic**; to appear in the Annals of Pure and Applied Logic.
- *D. Fernández*; **Dynamic Topological Completeness for** $^{2}$; Logic Journal of IGPL 2007; doi: 10.1093/jigpal/jzl036.
- *B. Konev, R. Kontchakov, F. Wolter and M. Zakharyaschev*; **Dynamic topological logics over spaces with continuous functions**, forthcoming.
- *P. Kremer, G. Mints*; **Dynamic Topological Logic**, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 131, pp. 133-158, 2005.