17

Consistencia y relevancia en el razonamiento abductivo

Fernando Soler Toscano

17.1. Introducción

Existen numerosas formas de definir un problema abductivo y una solución abductiva. Seguiremos las definiciones de [5], que coinciden con lo que Aliseda [1] llama *problema abductivo novedoso* y *solución consistente y explicativa*.

Decimos que (Θ, φ) es un *problema abductivo* sii:

$$\Theta \not\models \varphi \tag{17.1}$$
$$\Theta \not\models \neg\varphi \tag{17.2}$$

De esta manera representamos que φ es un *hecho sorprendente* para la teoría Θ, dado que no φ ni su negación son consecuencia de Θ.

Dado un problema abductivo (Θ, φ), decimos que α es una *solución abductiva* si se verifican:

$$\Theta, \alpha \models \varphi \tag{17.3}$$
$$\Theta, \alpha \not\models \bot \tag{17.4}$$
$$\alpha \not\models \varphi \tag{17.5}$$

La condición (17.3) asegura que α extiende Θ de forma que resulta posible derivar φ. La consistencia de la explicación α con la teoría queda asegurada por (17.4). Finalmente, (17.5) garantiza que α es una explicación válida para φ *dentro de* la teoría Θ, dado que α no explica φ por sí sola.

17.2. Trivialidad, consistencia y relevancia

17.2.1. Soluciones triviales

Es frecuente tomar el razonamiento abductivo como ejemplo de razonamiento científico, especialmente en el marco de la generación de nuevas teorías [2]. Pero entonces, si queremos tratarlo formalmente, necesitamos evitar cierto tipo de trivialidad que fácilmente puede aparecer en las soluciones.

La definición anterior de solución abductiva no evita soluciones triviales. De hecho, dado el problema abductivo (Θ, φ), la fórmula

$$\alpha \equiv \left(\bigwedge_{\gamma \in \Theta} \gamma \right) \to \varphi \tag{17.6}$$

- Cumple el requisito (17.3), dado que Θ es el antecedente de la implicación α y φ su consecuente.
- También verifica (17.4), dado que en otro caso, si $\Theta, \alpha \models \bot$ entonces $\Theta \models \neg\alpha$ y por evaluación del implicador de α tenemos que $\Theta \models \neg\varphi$. Pero sabemos que esto no es posible por (17.2).
- Finalmente, para problemas abductivos Θ no triviales, donde ninguna de sus fórmulas son válidas, se verificará (17.5), pues basta encontrar una fórmula $\gamma \in \Theta$ tal que $\neg\gamma \not\models \varphi$ (es razonable suponer que hay alguna fórmula de Θ tal que ella y su negación son independientes de φ) para tener un modelo $\mathcal{M}$ que hace verdaderas a $\neg\gamma$ y $\neg\varphi$; por tanto $\mathcal{M}$ hace falso el antecedente de α (ya que γ es uno de los términos de su conjunción) y falsa φ. De modo que se verifica (17.5), porque $\mathcal{M}$ satisface α (al hacer falso su antecedente) pero no φ.

Por tanto para cualquier problema abductivo podemos encontrar una fórmula trivial (17.6) que lo soluciona. Para tomarnos en serio la abducción no debemos permitir este tipo de soluciones.

17.2.2. El problema de la consistencia

La condición (17.4) se conoce como el *requisito de consistencia*, al requerir que la solución abductiva α sea consistente con la teoría Θ. Pero puede ocurrir que no exista ninguna solución que cumpla este requisito. Incluso podemos encontrarnos teorías Θ tales que:

- $\Theta \models \neg\varphi$, o incluso
- $\Theta \models \bot$

La lógica paraconsistente nos enseña que no es necesario deshacernos de Θ en estos casos, ni tampoco renunciar a explicar φ dentro de Θ. Por ello, debemos relajar el requisito de consistencia (17.4).

17.2.3. El problema de la relevancia

Tal vez el mayor problema de la fórmula (17.6) es que no tiene por qué haber ninguna relación entre Θ y φ para que α pueda ser una solución. Esto es, puede ser $\Theta = \{p\}$, $\varphi = q$ y α será entonces $p \to q$. Pero en este caso ni siquiera nos gustaría que el problema abductivo $(\{p\}, q)$ tuviera una solución, porque la teoría $\{p\}$ no tiene ningún átomo en común con el hecho que se quiere explicar, q. Problemas de este tipo pueden aparecer no sólo en lógica proposicional, sino en cualquier sistema formal.

Debemos exigir que la explicación sea relevante en dos sentidos:

- Relevancia de α dentro de la teoría Θ.
- Relevancia de $\{\Theta, \alpha\}$ para inferir φ.

17.3. Una solución clásica

Existen propuestas para evitar la trivialidad dentro del razonamiento abductivo. En [6], por ejemplo, imponemos a las soluciones abductivas la forma sintáctica de un conjunto de literales, y usamos un criterio clásico de *minimalidad* para preferir las soluciones con conjuntos más pequeños de literales. Sin embargo restringir la forma sintáctica de las soluciones, si bien resulta de gran utilidad en muchas aplicaciones, y tiene una ventaja computacional obvia, deja fuera muchas buenas soluciones abductivas.

En esta sección realizamos una propuesta de abordar los problemas de consistencia y relevancia dentro de la lógica clásica. Veremos un criterio preferencial relacionado, no con el número de fórmulas de la solución abductiva, sino con el número de fórmulas de la teoría que la solución emplea. Por ello, fácilmente convertiremos este criterio preferencial en un criterio de relevancia. Indicamos cómo podríamos hacer un cálculo siguiendo esta propuesta a partir del cálculo de δ-resolución [4].

17.3.1. Redefiniendo la solución abductiva

Consideramos que dado el problema abductivo (Θ, φ), una solución abductiva al mismo es un par (α, A) tal que:

$$
\begin{array}{rcll}
A & \subseteq & \Theta & \qquad (17.7)\\
A, \alpha & \models & \varphi & \qquad (17.8)\\
A, \alpha & \not\models & \bot & \qquad (17.9)\\
\alpha & \not\models & \varphi & \qquad (17.10)\\
A', \alpha & \not\models & \varphi \quad \forall A' \subset A & \qquad (17.11)
\end{array}
$$

Obsérvese que las condiciones (17.8)–(17.10), son, respectivamente, reformulaciones de (17.3)–(17.5). Pero ahora sólo requerimos consistencia de α con A no con toda la teoría. La condición (17.11) introduce un criterio de minimalidad de forma que el conjunto A no contenga fórmulas innecesarias para derivar φ junto con α.

Podemos incorporar un criterio preferencial para escoger soluciones con conjuntos de fórmulas de Θ de mayor cardinalidad. Si (17.11) es un criterio de minimalidad que prefiere menores conjuntos A para una misma α, ahora para comparar soluciones con distintas fórmulas elegimos aquellos con conjuntos mayores. Por tanto, si $|A| > |B|$, entonces la solución (α, A) es preferible a (β, B). Obsérvese que este criterio prefiere las soluciones más relevantes para la teoría porque requieren un mayor número de fórmulas de la misma.

17.3.2. Consistencia y relevancia mediante δ-resolución

El cálculo de δ-resolución [4] es dual al cálculo de resolución [3]. Esto es, en la variante proposicional, se parte de la forma normal disyuntiva (en vez de conjuntiva) equivalente a cierta fórmula α. Cada resolvente obtenido δ verifica $\delta \models \alpha$. De ahí su utilidad para realizar razonamiento abductivo.

Presentamos a continuación una propuesta para resolver los problemas de consistencia y relevancia en lógica proposicional usando δ-resolución. Para obtener más detalles sobre los aspectos formales del cálculo se puede acudir a [4, 5].

Lo primero que hacemos es redefinir la noción de δ-cláusula. Si bien en [4] la definimos como un conjunto de literales que se interpretaba como su conjunción, ahora será un par (Σ, A) donde Σ sigue siendo un conjunto de literales interpretados conjuntivamente y A es un conjunto de fórmulas.

Dada una fórmula α, el proceso para obtener su forma δ-clausal es, primero, obtener la forma normal disyuntiva de α y luego, por cada conjunción de literales $\lambda_i \wedge \cdots \wedge \lambda_n$, se crea la δ-cláusula $(\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}, \{\alpha\})$.

Dado el problema abductivo (Θ, φ), comenzamos por construir la forma δ-clausal de cada una de las fórmulas de

$$\{\varphi\} \cup \{\neg\gamma : \gamma \in \Theta\} \tag{17.12}$$

y unir todas las δ-cláusulas resultantes en un mismo conjunto. El resultado al que llegamos es la misma forma δ-clausal de [4] pero añadiendo a cada δ-cláusula una *etiqueta* que indica la fórmula de la que se ha obtenido. Nótese que la etiqueta de las δ-cláusulas obtenidas por cada fórmula $\neg\gamma$ de (17.12) deberá ser $\{\gamma\}$, ya que es la fórmula de Θ de la que proviene, aunque haya sido obtenida a partir de su negación. Este etiqueta nos servirá para identificar cuáles son las fórmulas de Θ y φ que intervienen en la derivación $\Theta, \alpha \models \varphi$ para cada α que obtengamos como δ-resolvente. Para ello debemos modificar la regla de δ-resolución de forma que ahora:

$$\frac{(\Sigma_1 \cup \{\lambda\}, A) \quad (\Sigma_2 \cup \{\neg\lambda\}, B)}{(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, A \cup B)} \tag{17.13}$$

17.3.3. Un proceso abductivo consistente y relevante

Con los elementos anteriores podemos modificar el proceso abductivo de [5] de la siguiente manera:

1. Se obtiene la forma δ-clausal de (17.12) tal como se explicó más arriba.

2. A la forma δ-clausal obtenida en el paso 1 se le aplica δ-resolución según la regla (17.13). Durante el proceso eliminamos toda δ-cláusula (Σ, A) que cumpla alguna de las siguientes condiciones:

   - En algún momento se ha obtenido (Σ', A) y $\Sigma' \subset \Sigma$. Con esto estamos aplicando el criterio clásico de minimalidad por susbunción.
   - En algún momento se ha obtenido (Σ, A') y $A' \subset A$. En este caso se elimina (Σ, A) porque no verificará el requisito (17.11).
   - Si se obtiene (Σ', A') con $\Sigma' \subset \Sigma$ y $A' \subset A$ se elimina igualmente (Σ, A) por los dos motivos anteriores.

   Cuando no es posible generar nuevas δ-cláusulas mediante (17.13) en el conjunto resultante, entonces cada (Σ, A) obtenida con $\Sigma \neq \emptyset$ verifica las condiciones (17.7)–(17.11).

3. De todas las δ-cláusulas obtenidas en el paso 2 seleccionamos aquellas (Σ, A) con conjuntos A de mayor cardinalidad y construimos las soluciones:

$$\left(\bigwedge_{\lambda\in\Sigma} \lambda, A\right) \tag{17.14}$$

Así aplicamos el criterio preferencial de relevancia explicado, exigiendo que el conjunto A de fórmulas de Θ consistentes con la solución y relevantes para derivar φ sea de la mayor cardinalidad posible.

Las soluciones (17.14) que genera este proceso abductivo son conjunciones de literales. Sin embargo, como cualquier fórmula proposicional equivale a un conjunto de δ-cláusulas, podemos generar soluciones de forma sintáctica arbitraria seleccionando un conjunto de δ-cláusulas (por ejemplo aquellas con conjuntos de fórmulas de Θ de mayor cardinalidad),

$$\{(\Sigma_1, A_1), \cdots, (\Sigma_n, A_n)\} \tag{17.15}$$

y crear la solución abductiva

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{\lambda\in\Sigma_i} \lambda, \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \tag{17.16}$$

Las fórmulas de (17.16) se pueden convertir a cualquier forma sintáctica. Debemos cuidarnos de no tomar en (17.15) todas las δ-cláusulas resultantes, pues volveríamos fácilmente a la trivialidad de (17.6), con una solución donde $A = \Theta \cup \{\varphi\}$.

17.4. Comentarios finales

El criterio preferencial que hemos usado, por el que elegimos las soluciones que usan una mayor parte de Θ para derivar φ, se puede modificar de diversas maneras.

Por ejemplo, parece razonable que algunos axiomas de la teoría sean más relevantes que otros, bien por formar parte del núcleo de Θ, o por estar más relacionados con φ. Entonces, si tenemos una función $\theta : \Theta \to \mathbb{R}$ que asigna a cada fórmula de la teoría su *grado de relevancia* para φ, podemos definir la *relevancia de una solución abductiva* que verifica (17.7)– (17.11) como

$$\sum_{\lambda\in A} \theta(\lambda) \tag{17.17}$$

y seleccionar las soluciones donde el valor de (17.17) es más alto.

No hemos incluido en estas notas demostraciones formales que garanticen la corrección del proceso abductivo presentado en la sección 17.3.3. Quedan pendientes para un trabajo posterior, aunque en lo fundamental se pueden adaptar las pruebas de [4] ya que el efecto del etiquetado que aquí introducimos es similar a seguir distintos procesos abductivos en paralelo, con diferentes subconjuntos de Θ.

Al igual que hicimos en [5], donde implementamos el proceso abductivo de [4] mediante un demostrador escrito en Prolog, sería interesante implementar el de 17.3.3. Computacionalmente, en este caso es mucho más complejo, precisamente porque como hemos comentado el etiquetado supone realizar en simultáneo un número de procesos abductivos que en el caso peor puede llegar a ser $2^{|\Theta|+1}$. Se trata del coste de resolver los problemas de consistencia y relevancia en lógica clásica, lo que justifica el paso a lógicas no clásicas para el razonamiento abductivo.

La realización de este trabajo me ha supuesto volver a los problemas que trabajé durante mi doctorado, que no sólo fue dirigido, sino también animado, por Ángel. Me ha parecido adecuado tratar los problemas de consistencia y relevancia en el razonamiento abductivo porque como al final concluyo justifican y obligan al giro hacia la pluralidad de lógicas no clásicas. Y este es el paso que hemos dado en el Grupo de Lógica, Lenguaje e Información, también de la mano de Ángel que lo impulsa de un modo que con justicia se puede calificar de consistente y relevante.

Bibliografía

[1] Atocha Aliseda. *Abductive Reasoning: Logical Investigations into Discovery and Explanation*, volumen 330 de *Synthese Library*. Springer, 2006.

[2] Ángel Nepomuceno-Fernández, Fernando Soler-Toscano, y Atocha Aliseda-Llera. Searching the unity of science: From classical logic to abductive logical systems. En Symons et al. *Otto Neurath and the Unity of Science*. Springer, 2010.

[3] John Alan Robinson. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM*, 12:23–41, 1965.

[4] Fernando Soler Toscano. *Modelos formales de explicación en Lógica e Inteligencia Artificial*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 2005.

[5] Fernando Soler-Toscano, Ángel Nepomuceno-Fernández, y Atocha Aliseda-Llera. Model-based abduction via dual resolution. *Logic Journal of the IGPL*, 14(2), 2006.

[6] Fernando Soler-Toscano, Ángel Nepomuceno-Fernández, y Atocha Aliseda-Llera. Abduction via c-tableaux y δ-resolution. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 19(2):211–225, 2009.