10

Antecedentes de la Teoría de tipos híbrida

María Manzano

Resumen. Ángel y yo somos viejos colegas y sin embargo amigos. Y esto, en la *selva cantoriana* que constituye nuestra área de conocimiento, entraña un gran mérito mutuo. Posiblemente sea debido a que, como buenos andaluces, encontramos más estético tomarnos la vida con humor.

Nos conocimos cuando Ángel escribía su tesis doctoral sobre lógica de segundo orden (craso error que también yo había cometido con anterioridad y que subsané posteriormente dedicándome a la lógica de orden superior) y se puso en contacto conmigo. En ese momento yo acababa de regresar de Berkeley en donde había estudiado con Leon Henkin y le ayudé en lo que pude.

Él sabe que en mí siempre tuvo a una buena amiga.

10.1. Introducción

Patrick Blackburn en su "Tense, temporal reference and tense logic" [5] combina las ideas de Reichenbach sobre la importancia de los puntos de referencia en el análisis de los tiempos verbales con las de Prior sobre la *visión interna* que esta lógica modal proporciona. Crea así la que denominará lógica híbrida [6], un lenguaje obtenido añadiendo al temporal tanto un conjunto de nominales NOM, que serán considerados fórmulas, como un conjunto de operadores modales, $\{@_i \mid i \in \text{ NOM}\}$. Anteponer dicho operador a una fórmula φ permite expresar de forma explícita que en el instante i la fórmula φ es verdadera.

Una década después, Carlos Areces y Blackburn en su [2] añaden nominales a la lógica intensional de Montague y construyen así una lógica híbrida más expresiva. El sistema resultante se beneficia de las ideas de los tres: Reichenbach, Prior y Montague.

La colaboración de Antonia Huertas y María Manzano con los autores mencionados parte del artículo [2]. La concepción de Henkin sobre lógicas de orden superior ha sido clave a la hora de crear una teoría de tipos híbrida, *TTH.* Tratándose de una lógica tan expresiva, nos pareció pertinente recurrir a los modelos generales de Henkin y fuimos capaces de adaptar su jerarquía de tipos a la nueva lógica, siendo leales no sólo a su concepción, también a su construcción [10].

De esta forma añadimos a Leon Henkin a la lista de los maestros: Reichenbach, Prior and Montague. Estoy segura de que a Ángel le encantará este cuarteto.

10.2. Reichenbach analiza los tiempos verbales

Hans Reichenbach en su libro *Elements of Symbolic Logic* [15] incluye dos capítulos sobre las aplicaciones de la lógica a la lingüística. Es especialmente interesante su tratamiento de los tiempos verbales en las lenguas naturales. Para él

"*Tenses determine time with reference to the time point of the act of speech*" [15].

Para poder representar los tiempos verbales utiliza tres momentos clave del discurso: el de habla (H), el del evento (E) y el de referencia (R). El primero fija el momento de enunciación, cuando se pronuncia la sentencia; el segundo momento a destacar es el del acontecimiento, cuando sucede aquello de lo que hablamos; y el de referencia nos sirve para situarnos temporalmente en relación a otro acontecimiento, y pudiera ser distinto de los otros dos. Es importante esta distinción pues empleando sólo los puntos H y E habría tres posibilidades: "*before the point of speech*", "*simultaneous with the point of speech*", and "*after the point of speech*". Así que sólo podríamos representar tres tiempos verbales (*pasado*, *presente* y *futuro*) y, como Reichenbach señaló, *"the number of verb tenses is obviously greater"*. la clave está en darse cuenta de que hay tiempos verbales que relacionan dos eventos. Para dar cabida a la variedad de tiempos con los que contamos en la lengua natural Reichenbach introduce el *punto de referencia*, determinado por el propio contexto, y que permite representar al resto de los tiempos. Vamos a ilustrarlo con unos ejemplos.

Si digo *"Alba había cantado"* intuimos claramente que hay un momento pasado entre el punto de enunciación y el del cante que es el que nos ha hecho elegir este tiempo verbal. Por ejemplo, le estoy contando a Ángel que viajé a Barcelona para asistir a un concierto de cante flamenco en el que participaba mi sobrina Alba pero que llegué demasiado tarde, cuando su actuación había acabado. Ese momento de mi llegada al concierto, determinado por el contexto, es el punto de referencia. La representación tridimensional del tiempo verbal en la frase *"Alba había cantado"* es *E–R–H*. Aquí el acontecimiento (el cante de Alba) es anterior al de referencia (mi llegada al local del concierto en Barcelona) y al de enunciación (mi conversación con Ángel).

Cuando digo *"Alba cantó"*, expreso que el cante ocurrió en el pasado, en un momento que el contexto aclarará. En la representación de Reichenbach sería *E,R–H;* aquí el punto de referencia y el del acontecimiento coinciden y preceden al del habla. En la figura 10.1 aparecen representados los tiempos verbales, adaptando el esquema de Reichenbach.

La posición de R respecto H se indica con los términos *pasado* (*R-H*), *presente* (*H,R*) y *futuro* (*H-R*); la posición de E respecto R con los términos *anterior* (*E-R*), *simple* (*R,E*) y *posterior* (*R-E*).

Aunque el análisis expuesto ha sido ampliamente criticado, es necesario admitir que añadir el punto de referencia constituye una innovación históricamente relevante. Es evidente que muchas construcciones temporales no podrían representarse sin este tipo de referencia temporal.

Estructura	Denominación	Nombre tradicional	Ejemplo
E-R-H	Pasado anterior	Pretérito pluscuamperfecto	Alba había cantado
E,R-H	Pasado simple	Pretérito perfecto simple	Alba cantó
E,R-H		Pretérito imperfecto	Alba cantaba
$\left\{\begin{array}{c}\text{R-E-H}\\ \text{R-H,E}\\ \text{R-H-E}\end{array}\right\}$	Pasado posterior	Condicional	Alba cantaría
E-H,R	Presente anterior	Pretèrito perfecto compuesto	Alba ha cantado
H,R,E	Presente simple	Presente	Alba canta
H,R-E	Presente posterior	Futuro	Alba cantará (ahora)
$\left\{\begin{array}{c}\text{H-E-R}\\ \text{H,E-R}\\ \text{E-H-R}\end{array}\right\}$	Futuro anterior	Futuro perfecto	Alba habrá cantado
H-R,E	Futuro simple	Futuro	Alba cantará (mañana)
H-R-E	Futuro posterior		¿?

Figura 10.1: Reichenbach y su análisis de los tiempos verbales en español

10.3. La lógica temporal de Prior

Arthur Prior inventó la lógica temporal, un tipo de lógica modal que nos permite razonar teniendo en cuenta la dimensión temporal. Introduce así en su lógica la *perspectiva interna* característica de las lógicas modales, en donde las fórmulas se evalúan relativizando su verdad a los puntos concretos que sus modelos especifican; de esta manera se registra la información pero además se ubica temporalmente.

En su lógica temporal se definen las modalidades F y P que se antepondrán a los enunciados y significarán *"en el futuro"* y *"en el pasado"*.

Consideremos el enunciado *"Alba canta"* y representémoslo mediante q. La expresión $P\,q$ obtenida al anteponer el operador P será verdadera en un momento t si efectivamente Alba cantó en un momento s anterior a t.

En esta representación lo único que podemos expresar es que Alba de hecho cantó en un momento pasado completamente indeterminado; sin embargo, cuando en español decimos *"Alba cantó"* se entiende que eso sucedió en un momento determinado por el contexto. Al análisis de Prior le falta la referencia a un momento específico.

Veamos si tienen cabida aquí las tres entidades teóricas que Reichenbach emplea en su análisis:

1. el de habla (H) aparece bien representado en la lógica temporal, es sencillamente el punto o momento del modelo temporal en el que la fórmula se evalúa. Esta entidad es básica para la perspectiva interna que las lógicas modales propician y que Prior emplea en su lógica temporal.

2. el del evento (E) también aparece representado en la lógica temporal de Prior. Al anteponer P (o F) a la fórmula φ sitúa el punto del evento en el pasado (o en el futuro) del de habla.

3. el de referencia (R) no tiene cabida en la lógica de Prior.

Por consiguiente, tanto el punto de habla como el del evento de Reichenbach son compatibles con la visión de la lógica temporal de Prior y la *perspectiva interna* a la hora de evaluar sentencias que su análisis proporciona. En el capítulo “Precursors of tense-logic” de su libro *Past, Present and Future* [14], Prior dedica una sección a criticar el *punto de referencia* de Reichenbach. En especial le achaca a su análisis que no alcanza a interpretar tiempos complicados en los que se necesitarían dos puntos de referencia y que de hecho el punto de habla H no deja de ser un punto de referencia. Prior seguramente piensa que hay un presente, hasta cierto punto atemporal, en relación al cual obtenemos el pasado y el futuro mediante nuestros operadores temporales.

En cualquier caso, Prior nos proporciona un lenguaje lógico con el que actualmente sabemos bregar. La lógica temporal de Prior es muy útil, pero es incapaz de captar la riqueza de los tiempos verbales de la lengua natural.

10.4. La lógica intensional de Montague

Richard Montague pensó que la diferencia entre lenguaje natural y formal no era insalvable. De hecho en su “Universal Grammar” [12], intentó desarrollar una sintaxis y semántica universales que pudieran servir de marco en el que situar ambos lenguajes. En su “The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English” [13], Montague trata de desarrollar de manera formal y rigurosa un fragmento de la lengua inglesa. Para ello crea un sistema lógico (en donde aparecen ciertas reglas temporales) que él denomina *Tense Intensional Logic*: emplea los operadores F y P de Prior en una variante temporal de su lógica intensional. Los tipos lógicos que introduce en su lenguaje le permiten captar la información pertinente mediante una abstracción lambda, representable en forma de árbol.

Para él interpretar una expresión lingüística no es asignar *denotaciones*, sino *intensiones*. Una estructura es de la forma $\langle \mathcal{A}, I \rangle$ donde I es el conjunto de los *momentos de tiempo* (I está ordenado linealmente), y las fórmulas pueden tener distintos valores de verdad en distintos instantes $i \in I$. Por lo tanto, para cada $i \in I$, hay un modelo $\langle \mathcal{A}, i \rangle$. Y la interpretación $\langle \mathcal{A}, I \rangle$ asigna intensiones (funciones de I en el conjunto de valores de verdad o en ciertos conjuntos) a cada fórmula o expresión. La idea de Montague es que los tiempos verbales actúan sobre las intensiones de las fórmulas, no sobre sus extensiones [13].

10.5. Henkin y la completud de teoría de tipos

Justo en la introducción de su artículo “Completeness in the theory of types” [10], Henkin nos recuerda los resultados de Gödel, que en ese momento eran bien conocidos:

Tanto el de completud de la lógica de primer orden

> “...each formula of the calculus is a formal theorem which becomes a true sentence under one of a certain intended class of interpretation of the formal system.”
> (Henkin 1949, p. 81)

Como el de incompletud de la lógica de segundo orden

> "... no matter what (recursive) set of axioms are chosen, the system will contain a formula which is valid but not a formal theorem."
> (Ibid, p. 81)

Por supuesto, con semántica estandar

> "...the individual variables are interpreted as ranging over an (arbitrary) domain of elements while the functional variables of degree n range over all sets of ordered n-tuples of individuals:"
> (Ibid, p. 81)

Y anuncia que el problema tiene solución si se admiten modelos no estándar

> "... there is a wider class of models ... redefine the notion of valid formula... second order calculus is complete: a formula is valid if and only if it is a formal theorem."
> (Ibid, p. 81-82)

¿Cómo demostró Henkin en su tesis doctoral, en el año 1947, la completud de la teoría de tipos?

Una respuesta rápida a esta pregunta es: modificando la semántica y por consiguiente a la propia lógica. Veámoslo en el caso de la lógica de segundo orden.

Una vez definida la clase de las estructuras estándar $\mathcal{E}.\mathcal{E}$ se define el conjunto $VAL_{\mathcal{E}.\mathcal{E}}$ de las fórmulas válidas en todas ellas. Sabemos que no hay ningún cálculo completo para este conjunto $VAL_{\mathcal{E}.\mathcal{E}}$ ya no es recursivamente enumerable. Pero incluso sabiendo que no hay cálculo capaz de generar a todas las fórmulas válidas en esta clase de modelos, hay ciertos axiomas y reglas que son correctas y definimos con ellas un cálculo, CAL.

Puesto que el conjunto de los teoremas de este cálculo TEO es un subconjunto propio de $VAL_{\mathcal{E}.\mathcal{E}}$, para definir una semántica adecuada a ese cálculo debemos ampliar la clase de modelos pues de esa manera reduciremos el de las fórmulas en ellos válidas (cuanto mayor sea la clase de modelos más reducido será el conjunto de fórmulas válidas en ella pues para ser válida en una clase más amplia necesitará pasar más *"controles de calidad"*).

Aceptamos que hemos sido demasiado restrictivos al exigir que los universos relacionales del modelo contengan todas las relaciones posibles —*i.e.*, modelos donde $A_n = \wp A^n$, para todo n. Si aceptamos modelos no estándar —*i.e.*, estructuras donde $A_n \subseteq \wp A^n$, para todo n , pero para algún m, $A_m \neq \wp A^m$— entonces el conjunto de las fórmulas válidas en la clase de todos los modelos (estándar y no estándar) se reducirá considerablemente. Pero una estructura en la que sólo exigimos a los universos de relaciones $n - arias$ que sean subconjuntos del conjunto potencia del producto cartesiano del universo de individuos podría no contener a ciertas relaciones definibles mediante fórmulas de segundo orden; esto significaría que el *axioma de comprensión* (de definición de clases y relaciones) podría no ser válido. Así pues necesitamos estructuras cuyos universos relacionales obedezcan ciertas reglas de clausura: *Los modelos generales de Henkin*.

Con la semántica de modelos generales obtenemos completud, compacida y otros resultados, tales como Löwenheim-Skolem, propios de la lógica de primer orden.

Curiosamente, y esto es muy importante para la lógica hibrida, Henkin demostró primero la completud de la teoría de tipos y fue despues cuando modificó la prueba para obtener completud para la lógica de primer orden. Lo hizo introduciendo una colección infinita de constantes nuevas que servirían además para construir el modelo. Pues bien, un proceso similar al que él empleó para dar ese paso, pero introduciendo *designadores rígidos*, lo damos nosotros en la demostración de completud para la teoría de tipos híbrida, *HTT* [4].

En su artículo *"The discovery of my completeness proofs"* [8] Henkin expone el azaroso proceso que le llevó a inventar sus modelos generales. Pensó que las fórmulas válidas (en modelos estándar) pero indemostrables en el cálculo eran muy peculiares y que uno podría evitarlas redefiniendo el concepto de modelo.

El método empleado en su demostración de completud para teoría de tipos proporciona también un procedimiento de construcción de modelos generales para dicha lógica. Nosotros empleamos ambos en la demostración de completud de *HTT*.

10.6. Filosofía Zen

Ángel, como ya tenemos *una edad* creo que es momento de iniciarnos en la filosofía Zen. Y como no podía ser de otro modo, emplear los recursos de la lógica para evaluar la corrección de los argumentos. En el *Libro de la perfecta vacuidad* Tang de Ying le preguntó a Ge: *"¿Existían las cosas al principio de los tiempos?".* Xia Ge respondió: *"Si al principio de los tiempos no hubiesen existido las cosas, ¿cómo sería posible que existiesen hoy?. Con idéntica razón, los hombres del futuro podrían decir que hoy no existían las cosas".*

El argumento podría reformularse así

$\alpha :=$ *Si existen cosas en un momento dado, entonces en todo momento anterior han existido cosas*

$\beta :=$ *Existen cosas hoy*

$\gamma :=$ *El principio de los tiempos es anterior a todo*

$\delta :=$ *Existían cosas al inicio de los tiempos*

En la lógica temporal híbrida escribimos nuestro argumento del *jade celeste* de forma muy simple:

Hipótesis

$$\alpha := q \to [P]\, q$$
$$\beta := @_h\ q$$
$$\gamma := @_a\, [P]\ \bot$$

Conclusión

$$\delta := @_a\ q$$

Para demostrar δ a partir de las hipótesis usamos la ley de tricotomía de la lógica temporal

$$@_a\ h \vee @_a\ \ \langle P\rangle\, h \vee @_h\ \ \langle P\rangle\, a$$

Bibliografía

[1] Carlos Areces, Patrick Blackburn y Maarten Marx. "The computationalcomplexity of hybrid temporal logics". *Logic Journal of the IGPL*, 8(5):653–679, 2000.

[2] Carlos Areces y Patric Blackburn. Reichenbach. *Prior and Montague: A semantic get-together*. En S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. Lamb y J. Woods, editores, *Essays in Honour of Dov Gabbay*, College Publications, 2005.

[3] Carlos Areces, Patrick Blackburn, Antonia Huertas y María Manzano, "Hybrid Type Theory. A Quarted in Four Movements". (en preparación)

[4] Carlos Areces, Patrick Blackburn, Antonia Huertas y María Manzano, "Hybrid Type Theory". (en preparación)

[5] Patrick Blackburn. "Tense, temporal reference and tense logic". *Journal of Semantics*, 11:83–101, 1994

[6] Patrick Blackburn y Jerry Seligman. "Hybrid Languages". *Journal of Logic, Language and Information*, 4:251–272, 1995.

[7] Patrick Blackburn, Johan Van Benthem y Frank Wolter. *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[8] Leon Henkin. "The Discovery of My Completeness Proofs". The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 2, No. 2. (Jun., 1996), pp. 127-158.

[9] Leon Henkin. "The Completeness of the First-Order Functional Calculus". The Journal of Symbolic Logic, Vol. 14, No. 3. (Sep., 1949), pp. 159-166.

[10] Leon Henkin. "Completeness in the Theory of Types". The Journal of Symbolic Logic, Vol. 15, No. 2. (Jun., 1950), pp. 81-91.

[11] Hybrid Logics Web Page [http://hylo.loria.fr/]

[12] Richard Montague "Universal grammar". *Theoria* 36 (1970), 373–398. (reimpreso en Thomason, 1974)

[13] Richard Montague. "The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English". En J. Hintikka, J. Moravcsik y P. Suppes, editores, *Approaches to Natural Language*, 221–242. Reidel, Dordrecht, 1973.

[14] Arthur Prior. *Past, Present and Future*. Clarendon Press, Oxford, 1967.

[15] Hans Reichenbach. "The tenses of verbs" in *Elements of Symbolic Logic*. Random House, New York, 1947.

[16] Richmond Thomason (ed.): *Formal Philosophy. Selected Papers by Richard Montague*. New Haven, 1974