5

Un sistema funcional completo para funciones sobreyectivas

Alfredo Burrieza
Inmaculada Fortes
Inmaculada Pérez de Guzmán

5.1. Introducción

Entre los planteamientos que combinan tiempo y modalidad se pueden destacar aquéllos que asocian los mundos posibles con una dimensión temporal. Planteamientos bien conocidos en este área son los de Thomason (marcos $T \times W$), donde el tiempo es el mismo en todo mundo posible y los marcos de Kamp, una generalización del planteamiento anterior, donde cada mundo posee su propio orden temporal (ver [5]).

El interés por combinar el tiempo con diferentes clases de modalidades es amplio, pues abarca campos como Lingüística, Filosofía, Ciencia de la computación teórica e Inteligencia Artificial. En esta línea, hemos desarrollado un planteamiento semántico denominado *funcional* a lo largo de varios artículos (ver, por ejemplo, [2, 3, 4]). En nuestro planteamiento cada mundo posible está provisto de su propio flujo de tiempo y los mundos se interconectan vía funciones (llamadas *funciones de accesibilidad*). Técnicamente, los *marcos funcionales* constituyen una generalización de los marcos de Kamp y poseen mayor flexibilidad a la hora de establecer conexiones entre distintos flujos temporales. El empleo de funciones como herramienta para conectar flujos de tiempo nos permite, además, representar propiedades básicas de la teoría de funciones, tales como propiedades de totalidad, parcialidad, inyectividad, sobreyectividad, etc. Desde un punto de vista teórico, el planteamiento funcional sigue la tradición de la aplicación de la lógica no estándar a la representación y tratamiento de teorías matemáticas. Desde un punto de vista práctico, este planteamiento permite modelar interacciones entre procesos con relojes que pueden estar o no sincronizados y es sabido que el estudio del comportamiento de los procesos es importante en ciertas áreas de Inteligencia Artificial (e.g., sistemas distribuidos).

En los trabajos sobre el planteamiento funcional, como los mencionados, se han tratado tanto la definibilidad de las propiedades funcionales (usando para ello diferentes lenguajes lógicos) como la corrección y completitud de sistemas formales que expresaban dichas propiedades. Concretamente, la cuestión de la completitud de estos sistemas ha quedado ultimada en [4], excepto para una determinada propiedad funcional: la sobreyectividad. En el artículo mencionado, se destacaba la incompletitud del sistema que define dicha propiedad. El motivo de esta exposición es, justamente, mostrar un sistema completo cuya clase de marcos trate con tal tipo de funciones[1]. Para la consecución de un sistema completo que permita expresar la sobreyectividad haremos uso de un lenguaje más complejo que los usados hasta el momento y que posee conectivas multimodales doblemente indizadas, donde el primer índice representa el flujo en el que se define el dominio de una función y el segundo índice representa el conjunto imagen de dicha función. Conviene destacar, además, que esta solucción es generalizable a los sistemas formales que tratan con el resto de los tipos de funciones estudiadas en los artículos citados.

5.2. La lógica multimodal $\mathcal{L}^{\mathfrak{I}}$

5.2.1. Sintaxis de $\mathcal{L}^{\mathfrak{I}}$

Vamos a considerar la lógica multimodal $\mathcal{L}^{\mathfrak{I}} = (L^{\mathfrak{I}}, \mathcal{M}^{\mathfrak{I}})$, donde $\mathfrak{I}$ es un conjunto numerable y no vacío de índices ("nominales de flujo"), $L^{\mathfrak{I}}$, el lenguaje y $\mathcal{M}^{\mathfrak{I}}$ un conjunto de modelos para $L^{\mathfrak{I}}$. Fijado un conjunto $\mathfrak{I}$, el alfabeto de $L^{\mathfrak{I}}$ consiste en un conjunto infinito numerable $\mathcal{V}$ de variables proposicionales (*átomos*); las constantes lógicas $\top$ ("verdad") y $\perp$ ("falsedad"), y las conectivas booleanas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$; las conectivas temporales de Prior F ("en algún instante en el futuro") y P ("en algún instante en el pasado ") y dos familias de conectivas modales monarias: una con conectivas de la forma $\lozenge_i^j$ y otra con conectivas de la forma $\blacklozenge_j^i$, con $i, j \in \mathfrak{I}$. El significado intuitivo de una expresión como $\lozenge_i^j A$ es *"estamos situados en el flujo temporal i y A es verdadera en la imagen que tiene el instante actual en el flujo temporal j"* y el significado intuitivo de $\blacklozenge_j^i A$ es *"estamos situados en el flujo temporal j y A es verdadera en alguna antiimagen que tiene el instante actual en el flujo temporal i"*. Las fórmulas bien formadas (fbfs) se generan mediante la construcción de las reglas de la lógica proposicional clásica con la adición de la siguiente regla de formación: Si A is a fbf, entonces FA, PA, $\lozenge_i^j A$ y $\blacklozenge_j^i A$ (para $i, j \in \mathfrak{I}$) son fbfs. Dicho esto, para cualesquiera $i, j \in \mathfrak{I}$, podemos introducir igualmente las conectivas no existenciales G, H, $\Box_i^j$ y $\blacksquare_j^i$, que se definen como es habitual. Concretamente, $\blacksquare_j^i A$ se lee *"si estamos situados en el flujo temporal j, entonces A es verdadera en toda antiimagen que tenga el instante actual en el flujo temporal i"*.

5.2.2. Semántica de $\mathcal{L}^{\mathfrak{I}}$

En lo que sigue usaremos la siguiente notación y terminología:

1. Sea $(A, <_A)$ un orden lineal estricto y $a \in A$. Entonces:

$$(a, \rightarrow) = \{a' \in A \mid a < a'\}; \quad (\leftarrow, a) = \{a' \in A \mid a' < a\}.$$

[1]Este trabajo se ha desarrollado ampliamente y aún no ha sido publicado.

2. If $f : A \longrightarrow B$ es una función parcial no vacía de A en B y $X \subseteq A$, definimos, como es usual: $f(X) = \{f(x) \mid x \in X \cap Dom(f)\}$. Concretamente, si $a \notin Dom(f)$, entonces $f(\{a\}) = \varnothing$.

3. Si $(A, <_A)$ and $(B, <_B)$ son órdenes lineales estrictos, $f : A \longrightarrow B$ es una función parcial no vacía y $f(\{a\}) = \varnothing$, entonces: $\big(\leftarrow, f(\{a\})\big) = \big(f(\{a\}), \rightarrow\big) = \varnothing$

Definición 5.2.1. *Un* **marco ind-funcional** *para* $L^{\mathfrak{I}}$ *(o, simplemente, un marco ind-funcional) es una terna* $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *tal que:*

1. *W es un conjunto no vacío de etiquetas (para un conjunto de flujos temporales).*

2. *$\mathcal{T}$ es un conjunto no vacío de órdenes lineales estrictos, disjuntos dos a dos, indizados por W, es decir, $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w) \mid w \in W\}$, donde:*

   (a) $T_w \neq \varnothing$ and $<_w$ es una relación de orden lineal estricto sobre T_w, para todo $w \in W$;

   (b) si $w \neq w'$, entonces $T_w \cap T_{w'} = \varnothing$, para cualesquiera $w, w' \in W$.

3. *$\mathcal{F} = \{f_i^j : T_i \longrightarrow T_j \mid i, j \in W \cap \mathfrak{I}\}$*[2] *es un conjunto de funciones no vacías, llamadas* **funciones de accesibilidad**, *tal que:*

   a*) cada función $f_i^j \in \mathcal{F}$ es una función parcial de T_i en T_j, para algún $i, j \in W \cap \mathfrak{I}$*[3]*;*

   b*) dado un par $(i, j) \in (W \cap \mathfrak{I}) \times (W \cap \mathfrak{I})$, existe (en $\mathcal{F}$) a los sumo una función de accesibilidad de T_i en T_j, denotada mediante f_i^j.*

Definición 5.2.2. *Sea $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ un marco ind-funcional. Los elementos de la unión disjunta $\biguplus_{w \in W} T_w$ se llaman* **coordenadas** *y nos referiremos a él como $\mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$.*

Definición 5.2.3. *Un* **modelo ind-funcional** *para $L^{\mathfrak{I}}$es una tupla ordenada $M^{\mathfrak{I}} = (\Sigma^{\mathfrak{I}}, h)$, donde $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un marco ind-funcional y h una función, llamada* **interpretación funcional**, *que asigna a cada átomo $p \in \mathcal{V}$ un subconjunto de $\mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$, i.e, $h : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$. La interpretación funcional h se extiende recursivamente a una función (denotada igualmente h) definida para todas las fórmulas de $L^{\mathfrak{I}}$, interpretando las constantes lógicas y las conectivaa booleanas como es habitual y que satisface las siguientes condiciones:*

- *$h(FA) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid (t_w, \rightarrow) \cap h(A) \neq \varnothing\}$;*
  $h(PA) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid (\leftarrow, t_w) \cap h(A) \neq \varnothing)\}$;
- *$h(\lozenge_i^j A) = \{t_i \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid f_i^j \in \mathcal{F}$ y $f_i^j(t_i) \cap h(A) \neq \varnothing\}$;*
- *$h(\blacklozenge_j^i A) = \{t_j \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid f_i^j \in \mathcal{F}$ y $(f_i^j)^{-1}(\{t_j\}) \cap h(A) \neq \varnothing\}$.*[4]

[2]Merece la pena advertir que no se requiere que $\mathfrak{I} \subseteq W$. Con esto admitimos nominales que no denotan ningún flujo.

[3]Nótese que únicamente admitimos funciones entre flujos con nominales, esto es, que estén nombrados.

[4]Advirtamos que $(f_i^j)^{-1}$ representa la relación inversa de la función f_i^j, es decir, no asumimos que $(f_i^j)^{-1}$ sea necesariamente una función.

Los conceptos de *satisfacibilidad*, *validez* y otras nociones semánticas se definen como es habitual.

Seguidamente vamos a mostrar una aplicación de esta semántica para tratar la propiedad que nos interesa en esta exposición: la *sobreyectividad*. Sea $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ un marco funcional donde cada $f_i^j \in \mathcal{F}$ es sobreyectiva. Podemos expresar este hecho a la manera conjuntista como sigue:

$$f_i^j(\leftarrow, t_i) \cup f_i^j(t_i, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, f_i^j(\{t_i\})) \cup (f_i^j(\{t_i\}), \rightarrow)$$

En nuestra lógica esta propiedad se puede definir mediante el siguiente conjunto de esquemas:

$$\{\ (H\Box_i^j A \wedge G\Box_i^j A) \rightarrow \Box_i^j (HA \wedge GA) \mid i, j \in \mathfrak{I}\ \}$$

En otras palabras, todo esquema de dicho conjunto es válido en cualquier marco funcional donde toda función sea sobreyectiva y, en cambio, en cualquier marco funcional donde esto no ocurra se refutará algún esquema del conjunto.

5.3. El sistema $\mathcal{S}^{\mathfrak{I}}$-*sob*$^{\Diamond\blacklozenge}$

Antes de definir este sistema necesitamos unas nociones preliminares que exponemos en la siguiente definición:

Definición 5.3.1. *Sea λ una secuencia de la forma*

$$\lambda = \gamma_1 \sharp_{i_1}^{j_1} \gamma_2 \sharp_{i_2}^{j_2} \dots \gamma_n \sharp_{i_n}^{j_n} \gamma_{n+1}$$

donde $\gamma_k \in \{F, P, \epsilon\}$, para todo $k = 1, 2, \dots, n+1$, y $\sharp_{i_s}^{j_s} \in \{\Diamond_{i_s}^{j_s}, \blacklozenge_{i_s}^{j_s}\}$ para todo $s = 1, 2, \dots, n$.

Decimos que λ is **adecuada** *si, para cada s $(1 \leq s < n-1)$, se tiene que toda subsecuencia de la forma $\sharp_{i_s}^{j_s} \gamma_{s+1} \sharp_{i_{s+1}}^{j_{s+1}}$ satisface que $j_s = i_{s+1}$. Diremos que λ es un* **bucle** *si es adecuada y además satisface que $i_1 = j_n$.*

El sistema $\mathcal{S}^{\mathfrak{I}}$-*sob*$^{\Diamond\blacklozenge}$ posee los siguientes esquemas de axioma y reglas de inferencia:

Esquemas de axioma:

1. A, siendo A una tautología veritativo-funcional.
2. Los esquemas temporales del sistema minimal lineal $\mathcal{K}_l$, o sea:

   2.1 $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$

   2.2 $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$

   2.3 $A \rightarrow GPA$

   2.4 $A \rightarrow HFA$

   2.5 $GA \rightarrow GGA$

   2.6 $\big(G(A \vee B) \wedge G(A \vee GB) \wedge G(GA \vee B)\big) \rightarrow (GA \vee GB))$

   2.7 $\big(H(A \vee B) \wedge H(A \vee HB) \wedge H(HA \vee B)\big) \rightarrow (HA \vee HB))$

3. Para cada $i, j \in \mathfrak{I}$:

   3.1 $\hat{\sharp}_i^j(A \to B) \to (\hat{\sharp}_i^j A \to \hat{\sharp}_i^j B)$ donde $\hat{\sharp} \in \{\Box, \blacksquare\}$

   3.2 $A \to \Box_i^j \blacklozenge_j^i A$

   3.3 $A \to \blacksquare_j^i \Diamond_i^j A$

   3.4 $\Diamond_i^j A \to \Box_i^j A$

   3.5 $(\blacklozenge_j^i A \wedge \gamma \blacklozenge_j^i B) \to \blacklozenge_j^i (A \wedge (PB \vee FB))$ donde $\gamma \in \{F, P\}$

   3.6 $\lambda A \to (PA \vee A \vee FA)$ donde λ es un bucle

   3.7 $(\blacklozenge_j^i A \wedge \blacklozenge_j^i B) \to \blacklozenge_j^i (A \wedge (PB \vee B \vee FB))$

   3.8 $\lambda A \to \bot$ si λ es una secuencia no adecuada

   3.9 $(\gamma \sharp_i^j A \wedge \gamma' \sharp_k^l B) \to \bot$ (para todo $i, j, k, l \in \mathfrak{I}$ con $i \neq k$)
   donde $\gamma, \gamma' \in \{F, P, \epsilon\}$[5], $\sharp_i^j \in \{\Diamond_i^j, \blacklozenge_i^j\}$ y $\sharp_k^l \in \{\Diamond_k^l, \blacklozenge_k^l\}$

   3.10 $(H\Box_i^j A \wedge G\Box_i^j A) \to \Box_i^j (HA \wedge GA)$

Reglas de inferencia

Las reglas de inferencia son las siguientes:

- Si $\vdash A$ y $\vdash A \to B$, entonces $\vdash B$
- Si $\vdash A$, entonces $\vdash GA$
- Si $\vdash A$, entonces $\vdash HA$
- Si $\vdash A$, entonces $\vdash \Box_i^j A$ (para cualesquiera $i, j \in \mathfrak{I}$)
- Si $\vdash A$, entonces $\vdash \blacksquare_j^i A$ (para cualesquiera $i, j \in \mathfrak{I}$)

Si eliminamos el esquema 3.10 de la presentación anterior tenemos el sistema minimal para la clase de funciones parciales.

Teorema 5.3.2. *El sistema $\mathcal{S}^{\mathfrak{I}}$-$sob^{\Diamond\blacklozenge}$ es correcto y completo respecto de la clase de todos los marcos sobreyectivos.*

La prueba de este teorema procede mediante una aplicación de la técnica "paso a paso" (ver, por ejemplo, [1]) de acuerdo con la cual, para cada fórmula A que sea consistente en $\mathcal{S}^{\mathfrak{I}}$-$sob^{\Diamond\blacklozenge}$, se prueba su satisfacibilidad construyendo por etapas un modelo funcional donde las coordenadas se asocian a conjuntos máximamente consistentes en $\mathcal{S}^{\mathfrak{I}}$-$sob^{\Diamond\blacklozenge}$ y A pertenece a alguno de dichos conjuntos.

[5] Usamos ϵ para denotar la cadena vacía de símbolos.

5.4. Una anéctoda curiosa

Alfredo Burrieza

Angel Nepomuceno es una persona que irradia una simpatía desbordante, así que parece destinado a que le acontezcan episodios extrañamente simpáticos. Recuerdo una ocasión en la que nos hallábamos alojados en un colegio universitario en Santiago de Compostela, eran unos días en los que participábamos como profesores en un máster de Lógica y Filosofía de la Ciencia. Volvíamos al colegio tras la cena en una noche muy fría del mes de febrero; con nosotros venía otro profesor, de Salamanca, llamado Juan Barba. Hacía tanto frío que no pensábamos en otra cosa que en llegar al colegio universitario, como si fuera nuestro hogar, un colegio que dejaba que desear en cuanto a comodidades se refiere, pero que suponía nuestra salvación en aquella jornada tan desagradable. En la sala de la entrada al colegio había un máquina que proporcionaba refrigerios y dulces por pocas monedas. No sé de quién partió la idea, posiblemente fuera yo, el caso es que los tres decidimos adquirir unas botellas pequeñas antes de subir a las habitaciones. Juan Barba y yo echamos las monedas y recogimos las botellas seleccionadas en un acto rutinario. Pero, Angel tenía que ser especial. La rutina la convirtió en un acto funambulesco. Pocas veces un acto tan simple, como el de una botellita acudiendo a su dueño por la abertura tras introducir la correspondiente moneda, ha dado lugar a un fenómeno tan insólito. Angel seleccionó una botella, no recuerdo si de agua o coca cola, tras echar la moneda se agitó una de las botellas del estante que veíamos tras el cristal de la máquina. Sucedió el típico ruido de la botella que cae de su sitio, pero ... no acudió a la abertura como era de esperar. Por contra, en una de esas casualidades que necesitan la conjunción de elementos físicos con una estadística que roza imposible, la botella chocó en el fondo, rebotó sin apenas espacio y .... se volvió a colocar en su sitio original. Una actuación que hubiera podido firmar el gran Houdini. Yo creo que eso le pasa por simpático.

Bibliografía

[1] J.P. Burgess. Basic tense logic. *Handbook of Philosophical Logic, vol 2: Extensions of Classical Logic*, editado por D. Gabbay y F. Guenthner: 89-133. Reidel, Dorchecht, 1984.

[2] A. Burrieza, I. Pérez de Guzmán y E. Muñoz. Indexed flows in temporal$\times$modal logic with functional semantics. En *Proceedings of Ninth International Symposium on Temporal Representation and Reasoning (TIME 02)*, 146-153, Manchester, UK. IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, 2002.

[3] A. Burrieza e I. Pérez de Guzmán. A functional approach for temporal$\times$modal logics. *Acta Informatica*, 39: 71-96, 2003.

[4] A. Burrieza, I. Pérez de Guzmán y E. Muñoz. Analizing completeness of axiomatic functional systems for temporal $\times$ modal logics. *Mathematical Logic Quaterly*, 56(1): 89-102, 2010.

[5] R.H. Thomason. Combinations of tense and modality. En D. Gabbay y F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic, Vol.2: Extensions of Classical Logic*, 135-65. Reidel, Dordrecht, 1984.