

**ANÁLISIS FUNCIONAL. GRUPO B.**  
**PRUEBA DEL TEMA II. 04/12/2007.**

---

APELLIDOS:

NOMBRE:

---

**PROBLEMA.**

Sea  $\ell_2$  el espacio vectorial formado por las sucesiones reales de cuadrado sumable. Consideremos en  $\ell_2$  las normas

$$\|(\xi_n)\|_\infty = \sup\{|\xi_n| : n \geq 1\};$$

$$\|(\xi_n)\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \right)^{1/2}.$$

(1) Probar que la identidad  $i : (\ell_2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\ell_2, \|\cdot\|_\infty)$  es continua.

(2) Estudiar la convergencia de las sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  en  $(\ell_2, \|\cdot\|_\infty)$  y  $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$  donde

$$x_n = \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \dots \right);$$

$$y_n = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 0, 0, \dots).$$

(3) ¿Son ambas normas equivalentes? ¿Es  $(\ell_2, \|\cdot\|_\infty)$  un espacio de Banach?

---