ANÁLISIS FUNCIONAL. GRUPO B".
PRUEBA TEMA 1. 13/11/2008.

Problema.
Sea H el espacio de Hilbert ℓ_2. Considerar el subespacio

$$E = \{(\xi_n)_n \in \ell_2 : 3\xi_1 - 4\xi_2 = 0\}$$

(a) Probar que E es cerrado.
(b) Calcular la distancia del vector $u = (1/n)_n$ a E y la proyección de u sobre E.

Solución. (a) Podemos observar que E es el núcleo de la aplicación $\phi : H \to R$ dada por $\phi(x) = (x|a)$ donde $a = (3, -4, 0, 0, ...)$. Como ϕ es continua, por ser un producto escalar con la segunda componente fija, se tiene que su núcleo es cerrado. También puede probarse directamente, observando que si $\{x_k\}$ es una sucesión en E convergente a $x \in H$, donde $x_k = (\xi_n^{(k)})_n$ y $x = (\xi_n)_n$, entonces $\lim_{k\to\infty} \xi_n^{(k)} = \xi_n$ para cada n, y en particular para $n = 1, 2$.

(b) Método (1). Vimos en un problema de la relación que siendo E el núcleo de ϕ se tiene que $d(u, E) = |(u|a/\|a\|)| = 1/5$. En la resolución de este mismo problema se puede observar que la proyección de u sobre E, o sea, el vector de E más próximo a u es el vector $u - \phi(u)a/\|a\|^2 = (22/25, 33/50, 1/3, 1/4, ...)$.

Método (2). Es fácil comprobar por los métodos habituales que
$E = \text{span } \{(4, 3, 0, 0, ..), e_n : n \geq 3\}$ y $E^\perp = \text{span } (3, -4, 0, 0, ..)$. Si escribimos $u = Pu + Qu$ donde P es la proyección sobre E y Q sobre $E^\perp$, o sea,

$$u = \lambda(3, -4, 0, 0, ...) + \mu(4, 3, 0, 0, ...) + \sum_{n\geq 3} \mu_n e_n$$

llegamos a $\mu_n = 1/n$ para $n \geq 3$, $\mu = 11/2$.
Esto nos dice que $Pu = (22/25, 33/50, 1/3, 1/4, ...)$ y por tanto, la distancia pedida es $\|u - Pu\| = 1/5$.
