ANÁLISIS FUNCIONAL. GRUPO A”.
PRUEBA TEMA 1. 18/11/2008.

Problema.
En el espacio de Hilbert ℓ_2 consideramos los vectores $u_1 = (1, 0, -1, 0, 0, ...)$, $u_2 = (1, -2, 1, 0, 0, ..)$, $e_n = (0, 0, ..., 0, 1_{\frown n}, 0, 0...)$
(a) Encontrar un sistema ortonormal que genere el mismo espacio que la familia $\{u_1, u_2, e_n : n \geq 4\}$. Probar que este sistema no es completo.
(b) Calcular la serie de Fourier de $v = (1, 1, 0, 0, ...)$ con respecto al anterior sistema ortonormal.
(c) Sea E el subespacio cerrado generado por esta familia. Calcular la proyección ortogonal de v sobre $E^{\perp}$.

Solución. (a) Como todos los vectores son ortogonales sólo hay que normalizar los dos primeros. Así llegamos a que el sistema es

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ... \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0, ... \right), e_n : n \geq 4 \right\}.$$

Para ver que no es completo podemos observar que el vector $(1, 1, 1, 0, 0, ..)$ es ortogonal a todos los vectores del sistema, con lo cual este no es maximal, lo que, como sabemos, equivale a no ser completo.

(b) La serie es

$$\left(v | \frac{u_1}{\|u_1\|} \right) \frac{u_1}{\|u_1\|} + \left(v | \frac{u_2}{\|u_2\|} \right) \frac{u_2}{\|u_2\|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ... \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0, ... \right) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0, ...).$$

(c) Sabemos que la suma de la serie de Fourier de v nos dá el vector del espacio cerrado generado por el sistema ortonormal más próximo a v, o sea, la proyección de v sobre E. Como $v = Pv + Qv$ donde P es la proyección sobre E y Q sobre $E^{\perp}$, tenemos que la proyección pedida es $v - Pv = (1, 1, 0, 0, ...) - (2/3, 2/3, 2/3, 0, 0, ...) = (2/3, 2/3, 2/3, 0, 0...)$.
También puede hacerse determinando un sistema generador de $E^{\perp}$. Es fácil ver que el vector $(1, 1, 1)$ genera $E^{\perp}$. Así podemos escribir

$$v = \alpha(1, 1, 1, 0, 0, ..) + \beta(1, 0, -1, 0, 0, ...) + \gamma(1, -2, 1, 0, 0, ..) + \sum_{n \geq 4} \mu_n e_n.$$

Resolviendo llegamos a $\alpha = 2/3$ y el vector buscado $(2/3)(1, 1, 1, 0, 0, ...)$.
