ESPACIOS NORMADOS. OPERADORES LINEALES

1. (a) Sea X un espacio normado, cuya norma satisface la identidad del paralelogramo, esto es,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

para todo $x, y \in X$. Probar que la función de $X \times X$ en R dada por

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

define un producto escalar en X que verifica $\|x\|^2 = (x|x)$.

2. Sea X el espacio vectorial formado por todas las funciones reales continuas y con derivada continua definidas en el intervalo $[0,1]$. Definimos la siguiente norma en este espacio

$$\|f\| = \max\{|f(t)| + |f'(t)| : t \in [0,1]\}.$$

(a) Probar que $\|\cdot\|$ es una norma en X.
(b) Probar que X con esta norma es un espacio de Banach.
(c) Sea $x_0 \in [a,b]$. Probar que $\|f\|_{x_0} = |f(x_0)| + \|f\|_\infty$ es una norma en $C^1([a,b])$ equivalente a la norma anterior.

3. Demostrar que los espacios ℓ_p son separables si $1 \le p < \infty$. Probar que, sin embargo, ℓ_∞ no es separable.

4. Sea Δ el disco unidad cerrado del plano complejo y $A(\Delta)$ la familia de funciones complejas continuas en Δ y analíticas en el interior de Δ. Probar que

$$\|f\| = \max_{z\in\Delta} |f(z)|$$

define una norma en este espacio. Probar que este espacio normado es separable.

5. Sean $1 \le p < q \le \infty$.
(a) Demostrar que $\ell_p \subset \ell_q$, $\ell_p \ne \ell_q$ y $\|x\|_q \le \|x\|_p$ para todo $x \in \ell_p$.
(b) Encontrar una sucesión $\{x_n\}$ en ℓ_p que converja en ℓ_q pero no converja en ℓ_p.

6. Sea $1 \le p < \infty$.
(a) Probar que ℓ_p está contenido en c_0 y que la inclusión $i : \ell_p \to c_0$ es continua.
(b) Probar que la sucesión

$$\left(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}, ...\right)$$

pertenece a c_0 pero no pertenece a ℓ_p para ningún p.

7. Probar que $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F})$ es completo si F es completo.

8. Sea $C([0,1])$ el espacio vectorial formado por todas las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[0,1]$ con la norma del máximo.
(a) Estudiar si las sucesiones de funciones definidas por $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ e $y_n(t) = t^n - t^{2n}$ convergen en $C([0,1])$.

(b) Considerar en $C([0,1])$ el conjunto

$$M = \{f \in C([0,1]) : \|f\| \leq 1; 0 = f(0) = f(1)\}.$$

Estudiar si M es un conjunto cerrado. ¿Es M compacto?

9. Consideremos la sucesión de funciones

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}.$$

Estudiar su convergencia en el espacio $C([0,1])$ con la norma del supremo y en el espacio $C^1([0,1])$ con la norma

$$\|f\| = \max\{|f(t)| + |f'(t)| : t \in [0,1]\}.$$

10. Sea $X = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ con la norma del máximo e Y el subespacio de X formado por las funciones tales que $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Probar que Y es subespacio cerrado de X y que, sin embargo, no existe $g \in X$ con $\|g\| = 1$ tal que $\|g - f\| \geq 1$ para todo $f \in Y$.