PRODUCTO ESCALAR. ESPACIOS DE HILBERT

1. Demostrar que en todo espacio prehilbertiano se verifica la identidad siguiente, llamada de Apolonio:

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

Solución:

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=(z-x\mid z-x)+(z-y\mid z-y)=2\|z\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2-2(z\mid x)-2(z\mid y).$$

$$\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}(x-y\mid x-y)+2(z-\frac{x+y}{2}\mid z-\frac{x+y}{2})=$$
$$=\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2-(x\mid y)+2\|z\|^2-2(z\mid x)-2(z\mid y)+\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2+(x\mid y)=$$
$$=2\|z\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2-2(z\mid x)-2(z\mid y).$$

2. Consideremos en ℓ_2 los vectores $u_1=(1,0,1,0,0,0...)$, $u_2=(2,-1,0,0,0,...)$. Sea

$$e_n=(0,0,...,0,1_{\frown n},0,0...)$$

con 1 en el lugar n. Sea E el subespacio de ℓ_2 generado por $\{u_1,u_2\}\cup\{e_n : n\geq 4\}$.
(a) Determinar el subespacio $E^\perp$ ortogonal a E.
(b) Calcular la proyección de $v=(1,0,0,0,...)$ sobre E y $E^\perp$.
(c) Calcular la distancia de v a E y a $E^\perp$.

Solución: (a) Sea $x=(\xi_1,\xi_2,...)$ un vector de $E^\perp$. Entonces $(x\mid u_1)=(x\mid u_2)=(x\mid e_n)$ pata todo $n\geq 4$ lo que implica $\xi_n=0$ pata todo $n\geq 4$. Resolviendo un simple sistema lineal de 2 ecuaciones con tres incógnitas llegamos a $x=\lambda(1,2,-1,0,0,..)$.

(b) Escribimos $v=\mu_1u_1+\mu_2u_2+\sum_{n\geq}\mu_ne_n+\mu_3(1,2,-1,0,0,..)$. Entonces $\mu_n=0$ para $n\geq 4$ y resolviendo un sencillo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas llegamos a $\mu_1=\mu_3=1/6$ y $\mu_2=1/3$. Por tanto la proyección de v sobre E es $v_1=(1/3)u_1+(1/6)u_2$ y la proyección de v sobre $E^\perp$ es $v_2=(1/6)(1,2,-1,0,0,..)$

(c) Las distancia pedidas son $\|v-v_1=v_2\|$ y $\|v-v_2=v_1\|$ respectivamente.

4. En el espacio prehilbertiano $C([-1,1])$ consideremos el subconjunto M de las funciones $f(t)$ tales que $f(t)=0$ para todo $t\geq 0$.
(a) Demostrar que M es un subespacio cerrado de $C([-1,1])$.
(b) Describir el subespacio $M^\perp$.
(c) ¿Se cumple el teorema de la proyección para $C([-1,1])$?

Solución. (a) Sea $\{f_n\}$ una sucesión en M convergente a una función f en $C([-1,1])$. Supongamos que existe $t_0\geq 0$ tal que $f(t_0)>0$. Entonces existe un subintervalo I de [0,1] y un número $c>0$ tal que $|f(t)|>c$ en I. Por tanto

$$\|f_n-f\|^2=\int_{-1}^{1}|f_n-f|^2\geq\int_I|f_n-f|^2\geq c^2m(I).$$

(b)$M^{\perp} = \{f \in C([-1,1]) : f(t) = 0$ para todo $t \leq 0\}$.
En efecto, es claro que si $f(t) = 0$ para todo $t \leq 0$ entonces $f \in M^{\perp}$. Recíprocamente si existe $t_0 < 0$ tal que $f(t_0) \neq 0$, existe un subintervalo I de [-1,0] y un número $c > 0$ tal que $|f(t)| > 0$ en I. Tomando $\in M^{\perp}$ tal que $g(t) = csignf(t)$ en I llegamos a $(f \mid g) \neq 0$.

(c) Sea $h(t) = 1$ para todo $t \in [-1,1]$. Si se escribe

$$h = f + g$$

con $f \in M$ y $g \in M^{\perp}$ se tiene:
-Como $f(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ entonces $g(t) = 1$ para todo $t \geq 0$, pero entonces g tiene un salto en 0.