ANÁLISIS FUNCIONAL. GRUPOS "A y B".
EXAMEN FINAL. 07/02/2008.

APELLIDOS:
NOMBRE:

CALIFICACIÓN: Cuestión) + PA) + PB) =

Tiempo: TRES HORAS. **Valoración:** La cuestión vale 5 puntos. Los problemas tienen un valor de 2,5 PUNTOS.

Cuestión. (a) Enunciar y demostrar el Teorema de Banach-Steinhaus (Principio de la Acotación Uniforme)
(b) Sea X el espacio vectorial de funciones de clase 1 en el intervalo [0,1] con la norma

$$\|f\| = \max\{|f(t)| + |f'(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Probar que X es un espacio de Banach.

(c) Definamos para cada $n \in \mathbf{N}$ la aplicación $\Lambda_n : X \to \mathbf{R}$ por

$$\Lambda_n(f) = n(f(1/n) - f(0)).$$

Probar que Λ_n es una aplicación lineal y continua. Probar que

$$\sup\{\|\Lambda_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Problema A. 5. Sea H el espacio de Hilbert ℓ_2 y F el subespacio

$$F = \{x = (\xi_n) \in \ell_2 : \xi_2 = 2\xi_1\}.$$

(a) Probar que F es cerrado.
(b) Determinar el subespacio $F^\perp$ ortogonal a F.
(c) Calcular la distancia del punto $(1, 0, 0, ..., 0, ..)$ a F.

Problema B. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Probar que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \quad , \quad \forall x \in X$$

si y sólo si Ker $T = \{0\}$ e Imagen (T) es un subespacio cerrado de Y.
