ANÁLISIS FUNCIONAL. GRUPOS "A y B".
EXAMEN FINAL. 10/09/2008.

APELLIDOS:
NOMBRE:

CALIFICACIÓN: C1) + PA) + PB) + PC) =

Tiempo: TRES HORAS. **Valoración:** La cuestión y el problema 3 valen 2 puntos. Los problemas 1 y 2 tienen un valor de 3 puntos.

Cuestión. Enunciar y demostrar el Teorema de Representación de Riesz.

Problema A.
Sea c_0 el espacio vectorial formado por las sucesiones (ξ_n) de números reales que tienden a cero y ℓ_1 el espacio de las sucesiones (ξ_n) de números reales absolutamente sumables con sus normas usuales $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ respectivamente.
(1) Probar que ℓ_1 es subespacio vectorial de c_0.
(2) Sea $i:\ell_1\to c_0$ la identidad y sea k un número natural arbitrario. Probar que existe un elemento (ξ_n) en ℓ_1 tal que $\|(\xi_n)\|_1=1$ y $\|(\xi_n)\|_\infty=1/k$.
(3) Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:
(3.1) ¿Es $i:\ell_1\to c_0$ continua?
(3.2) ¿Es $i(c_0)$ un subespacio cerrado de ℓ_1?
(3.3) ¿Existe algún número $m>0$ tal que $\|i((\xi_n))\|_\infty\geq m\|(\xi_n)\|_1$ para todo $(\xi_n)\in\ell_1$?

Problema B. Sea H el espacio de Hilbert ℓ_2. Consideremos en H los vectores $u_1=(1,0,1,0,0,0...)$, $u_2=(2,-1,0,0,0,...)$ y sea $e_n=(0,0,...,0,1_{\frown n},0,0...)$ con 1 en el lugar n. Sea E el subespacio de H generado por $\{u_1,u_2\}\cup\{e_n : n\geq 4\}$.
(1) Determinar el subespacio $E^\perp$ ortogonal a E.
(2) Calcular la proyección de $v=(1,0,0,0,...)$ sobre E y $E^\perp$.
(3) Calcular la distancia de v a E y a $E^\perp$.

Problema C. Sea $\|\cdot\|$ la norma del máximo en el espacio vectorial $C([0,1])$ de las funciones reales continuas en el intervalo [0,1] y sea $|||\cdot|||$ otra norma sobre este espacio que lo hace completo y tal que para cada sucesión $\{f_n\}$ en $C([0,1])$ con $|||\, f_n\,|||\to 0$ se tiene que $f_n(t)\to 0$ para cada $t\in[0,1]$.
(a) Probar que la identidad $i:(C([0,1]),|||\cdot|||)\to(C([0,1]),\|\cdot\|)$ es continua.
(b) Probar que una sucesión $\{f_n\}$ converge a una función f en $(C([0,1]),|||\cdot|||)$ si y sólo si converge uniformemente.
