

Mémoire de Master en Physique

**BREATHERS DISCRETS DANS UNE LIGNE DE
TRANSMISSION ÉLECTRIQUE
BI-INDUCTANCE DISSIPATIVE NON LINÉAIRE**

TSOPLÉFACK Joël François

Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Laboratoire de Mécanique

Table des matières

Dédicaces	viii
Remerciements	ix
Resumé	xi
Abstract	xii
Introduction générale	1
1 PRÉSENTATION DU MODÈLE	5
1.1 Introduction	5
1.2 Description du modèle	5
1.3 Choix de l'élément non linéaire	7
1.4 Modélisation de la diode varactor	8
1.5 Modélisation de la dissipation	10
1.6 Modélisation de la cellule élémentaire	10
1.7 Modélisation de la ligne électrique entière	13
1.8 Relation de dispersion linéaire	16
1.9 Existence des breathers discrets dans le réseau	18
1.10 Domaine d'existence des breathers discrets dans le réseau	19
1.11 Équation de propagation des ondes non linéaires	19

TABLE DES MATIÈRES

1.11.1	Approximation des milieux continus	20
1.11.2	Approximation semi-discrète	20
1.11.3	Équation de Ginzburg-Landau Cubique Complexe	22
1.12	Instabilité modulationnelle	26
1.12.1	Définition	26
1.12.2	Critère d'instabilité modulationnelle	27
1.13	Conclusion	28
2	CONSTRUCTION DES SOLUTIONS BREATHERS À PARTIR DE LA LIMITE ANTI-CONTINUE ET ÉTUDE DE LA STABILITÉ LINÉAIRE DES SOLUTIONS	29
2.1	Introduction	29
2.2	La limite anti-continue	30
2.2.1	Principe de la limite anti-continue	31
2.2.2	Procédure de continuation à partir de la limite anti-continue	32
2.2.3	Méthode de Newton-Raphson	32
2.2.4	Méthode numérique d'intégration des équations	34
2.3	Étude de la stabilité linéaire des solutions breathers	35
2.3.1	Théorie de Floquet	35
2.3.2	La matrice de Monodromie	36
2.3.3	Propriétés de stabilité des solutions périodiques	37
2.3.4	Évolution de la perturbation	38
2.3.5	Calcul de la matrice de monodromie et de son spectre	41
2.3.6	Propriétés de stabilité des solutions breathers	42
2.4	Conclusion	42
3	RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION	44

TABLE DES MATIÈRES

3.1	Introduction	44
3.2	Solution breather à la limite anti-continue : breather trivial à un pic centré sur un site	44
3.3	Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)	49
3.4	Breather à un pic centré sur deux sites (inter-site breather)	58
3.5	Solutions multibreathers	61
3.6	Étude de la sensibilité aux conditions initiales	64
3.7	Observation de l'instabilité modulationnelle	65
3.8	Absence de localisation en régime linéaire	70
3.9	Conclusion	75
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	76
	BIBLIOGRAPHIE	78

Table des figures

1.1	<i>Schéma de la ligne de transmission électrique.</i>	6
1.2	<i>Capacité non linéaire $C(V)$ (Figure (a)) obtenue avec une diode varicap polarisée en inverse (Figure (b)).</i>	8
1.3	<i>Modèle de la diode varactor.</i>	8
1.4	<i>Approximations numériques de $C(V)$, $I_D(V)$ et $\log(I_D(V)/I_s)$ pour la diode varactor</i>	9
1.5	<i>Modèle de la cellule élémentaire.</i>	10
1.6	<i>Courbes de résonance non linéaire correspondant à la cellule élémentaire. De bas en haut : $V_d=1,2,3,4$ et $5V$.</i>	13
1.7	<i>Modèle de la ligne électrique entière.</i>	13
1.8	<i>Présentation détaillée de la cellule de rang n dans la ligne entière.</i>	14
1.9	<i>Courbe de dispersion linéaire de la ligne bi-inductance.</i>	17
1.10	<i>Variations du produit $P_r Q_r$ en fonction de k</i>	28
2.1	<i>Cycle limite et trajectoire perturbée</i>	36
3.1	<i>Profil spatial initial du breather à 1 pic centré sur le site $n=16$ à la limite anti-continue (à gauche) et spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant (à droite) pour $V_d=4V$ et $f=243,6$ KHz</i>	45
3.2	<i>Profils du breather trivial à l'instant $\tau = 4,0251\mu s$ et à l'instant $\tau = 7,8615\mu s$</i>	46

TABLE DES FIGURES

3.3	<i>Superposition des profils du breather trivial aux instants $\tau = 4,0251\mu s$ (courbe en vert) et $\tau = 7,8615\mu s$ (courbe en bleu) pour $V_d=4 V$ et $f=243,6 KHz$</i>	46
3.4	<i>Profil spatio-temporel du breather à la limite anti-continue pour $V_d=4 V$ et $f=243,6 KHz$</i>	47
3.5	<i>Vue de dessus du profil spatio-temporel du breather à la limite anti-continue</i>	48
3.6	<i>Profil spatial du breather aux instants où il atteint ses plus grandes valeurs positives et plus petites valeurs négatives de la tension</i>	48
3.7	<i>Profil spatial initial du breather exact pour $V_d=4 V$ et $f=243,6 KHz$ et spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant</i>	50
3.8	<i>Profil spatial du breather exact aux instants $\tau = 3,5534\mu s$ et $\tau = 7,5155\mu s$ pour $V_d=4 V$ et $f=243,6 KHz$</i>	50
3.9	<i>Superposition des profils du breather exact aux instants $\tau = 3,5534\mu s$ et $\tau = 7,5155\mu s$</i>	51
3.10	<i>Oscillations du breather entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = 7,5155\mu s$</i>	52
3.11	<i>Profil spatio-temporel du breather exact</i>	53
3.12	<i>Vue de dessus du profil spatio-temporel du breather exact</i>	53
3.13	<i>Évolution de la tension dans les cellules 1 à 8</i>	54
3.14	<i>Évolution de la tension dans les cellules 9 à 16</i>	55
3.15	<i>Évolution de la tension dans les cellules 17 à 24</i>	56
3.16	<i>Évolution de la tension dans les cellules 25 à 32</i>	57
3.17	<i>Enveloppe des oscillations de la tension</i>	58
3.18	<i>Profil spatial initial du breather à un pic centré sur deux sites pour $V_d=4V$ et $f=243,6KHz$ et spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant</i>	59
3.19	<i>Oscillations du breather à 1 pic centré sur 2 sites entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = 7,4841\mu s$</i>	60
3.20	<i>Profil spatio-temporel du breather à un pic centré sur deux sites et vue de dessus correspondant</i>	60
3.21	<i>Profils des breathers à un, deux, trois et quatre pics pour $V_d=2 V$, et différentes valeurs de la fréquence, et spectres des multiplicateurs de Floquet correspondant</i>	62

TABLE DES FIGURES

3.22	<i>Profils des breathers à un, deux et trois pics pour $V_d=4 V$, et différentes valeurs de la fréquence, et spectres des multiplicateurs de Floquet correspondant</i>	63
3.23	<i>Profils de breathers à 5 pics obtenus en excitant la cellule 4 (à gauche), la cellule 5 (au centre) et les cellules 4 et 5 (à droite)</i>	64
3.24	<i>Profils de breathers à un pic obtenus en excitant la cellule 5 (à gauche), la cellule 15 (au centre) et à trois pics obtenu en excitant les cellules 5 et 15 (à droite)</i>	65
3.25	<i>Évolution de l'onde plane dans les cellules 1 à 9</i>	66
3.26	<i>Évolution de l'onde plane dans les cellules 10 à 24</i>	67
3.27	<i>Évolution de l'onde plane dans les cellules 25 à 32</i>	68
3.28	<i>Profil spatial du train de modes localisés et spectre de Floquet correspondant.</i>	69
3.29	<i>Évolution temporelle du train de modes localisés</i>	69
3.30	<i>Vue de dessus du profil spatio-temporel du train de modes localisés.</i>	70
3.31	<i>Graphe de V_n montrant l'absence de localisation d'énergie en régime linéaire pour $V_d=1V$ et $f = 243,6KHz$</i>	72
3.32	<i>Évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1 V$ et $f = 243,6KHz$</i>	72
3.33	<i>Zoom sur les premiers instants de l'évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1 V$ et $f = 243,6KHz$</i>	73
3.34	<i>Graphe de V_n montrant l'absence de localisation d'énergie en régime linéaire pour $V_d=1V$ et $f = 285KHz$</i>	73
3.35	<i>Évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1 V$ et $f = 285KHz$</i>	74
3.36	<i>Zoom sur les premiers instants de l'évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1 V$ et $f = 285KHz$</i>	74

Liste des tableaux

1.1	Valeurs des résistances R_l correspondant aux différentes valeurs des amplitudes de la tension excitatrice [24].	12
-----	--	----

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

- À Dieu, l'Architecte de l'infiniment petit et de l'infiniment grand ;

- Au Professeur Faustino PALMERO ACEBEDO ;

- À mon défunt père NGUEMO Justin ;

- À ma mère DONDJOU Cécile ;

- À ma tante FOUÉLÉFACK Marie Madeleine, à ma sœur MEGANG NKAMGA Estelle, et à tous mes proches.

Remerciements

- Tout d’abord, j’adresse mes sincères remerciements aux membres éminents du jury pour leurs critiques avisées et la mansuétude de leur appréciation.
- Je remercie infiniment le Professeur TCHAWOUA Clément pour m’avoir proposé le sujet traité dans ce mémoire, pour son soutien, ses critiques, son assistance et ses encouragements pendant les moments difficiles.
- Je remercie vivement le Professeur KOFANE Timoléon Crépin pour ses enseignements, son incitation et ses encouragements à faire la recherche.
- Je remercie infiniment le Professeur Faustino PALMERO ACEBEDO du Groupe de Physique Non Linéaire de l’Université de Séville en Espagne. Le Professeur Faustino PALMERO m’a beaucoup éclairé sur ce sujet. Je lui témoigne ici, toute ma reconnaissance pour ses encouragements et sa contribution matérielle qui ont été déterminants à l’édification de ce mémoire.
- Je remercie particulièrement Monsieur TOGUEU MOTCHEYO Alain Bertrand pour m’avoir guidé et assisté tout au long de ce mémoire.
- Je remercie tous les enseignants des départements de Physique et de Mathématiques de l’Université de Yaoundé I pour leurs enseignements de qualité.
- Je remercie tous mes camarades de promotion. Il s’agit exactement de : Fokoua Daniel, Konlack Pimagha Armel, Nwane Phillipe, Nzogne Louis, Djako Joseph, Foé Benjamen, Youssoufa Issou, Bekam Jontzo Franklin, Andomo Thomas Rich, Djeundam Steve Romial, Mukam Serge Paulin, Nguerpjouo Francis, Tamwo Robert, Tchokouansi Hermann, Negou Jospen Roméo,

Kamdem Simplicie et Nkoa Eyenga Blanche.

- Je remercie également mes amis Tankeu Georges Dimitry, Fokoua Daniel, Konlack Armel, Fotsing Armand, Heudjeu Olivier, Saguedong Ines, Nwane Phillipe pour leurs encouragements constants.
- Je remercie particulièrement Datouo Roger, Abobda Théodore et Sisco pour leurs multiples interventions par rapport à la résolution numérique des équations de ce mémoire sur Matlab. Je dois dire qu'ils m'ont tous beaucoup appris sur ce logiciel.
- Je remercie vivement Bekam Jontzo Franklin pour m'avoir particulièrement encouragé à terminer ce travail.
- Je remercie vivement Mounden Njimoluh Soule et Nguemo Fotso Thierry d'avoir partagé mes galères et de m'avoir encouragé.
- Je dis un grand merci à Gwendoline pour ses encouragements, sa gentillesse et sa sympathie.
- Je remercie Ndjomatchoua Thomas Frank pour les discussions que nous avons eu à propos de ce sujet et par rapport à l'échange de documents numériques que nous avons eu. Cela s'est révélé très utile.
- Je remercie Papa Nintidem Mathias pour son soutien constant.
- Je remercie tous mes oncles pour leurs encouragements incessants.
- Je remercie infiniment ma mère DONDJOU Cécile pour les sacrifices qu'elle a consenti pour que ce mémoire voie le jour.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions théoriquement et numériquement l'existence et les propriétés de stabilité des breathers discrets dans une ligne de transmission électrique bi-inductance dissipative non linéaire périodique. La ligne électrique est composée de 32 cellules élémentaires, contenant chacune une diode varactor et une inductance, couplées ensemble dans une configuration en anneau périodique à travers des inductances et forcée uniformément par une source extérieure de tension harmonique. Un modèle simple pour chaque cellule est proposé en utilisant une forme non linéaire pour les caractéristiques de la diode varactor à travers une dépendance en tension du courant et de la capacité. Nous établissons les équations décrivant la ligne et nous en déduisons le domaine fréquentiel d'existence des breathers discrets. La résolution numérique des équations de la ligne par la méthode de la limite anti-continue et celle de Newton-Raphson nous permet de construire les solutions breathers, et nous étudions la stabilité de ces solutions grâce à l'analyse de Floquet. Ensuite nous examinons la formation spontanée des breathers discrets à n pics ($n \in \mathbb{N}^*$) à travers l'instabilité modulationnelle. Nous constatons que les positions des pics dans le réseau des solutions breathers, et la stabilité de ces solutions dépendent sensiblement des conditions initiales. Enfin nous montrons que le phénomène de localisation dans la ligne est contrôlé par la non-linéarité, et que les breathers discrets résultent effectivement de la dispersion et de la non-linéarité.

Abstract

We study theoretically and numerically the existence and stability properties of discrete breathers in a periodic bi-inductance dissipative nonlinear electrical transmission line. The electric line is composed of 32 single cell nodes, each one containing a varactor diode and an inductor, coupled together in a periodic ring configuration through inductors and driven uniformly by a harmonic external voltage source. A simple model for each cell is proposed by using a nonlinear form for the varactor diode characteristics through the current and capacitance dependence on the voltage. We derive the equations describing the entire electrical line, and we deduce the frequencial domain of existence of discrete breathers. The numerical computation of line equations by anti-continuum limit method and Newton-Raphson scheme allow us to build breather solutions, and we study the stability of these solutions by means of Floquet analysis. Then, we examine the spontaneous formation of n -peaked breathers ($n \in \mathbb{N}^*$) through modulational instability. We notice that precise locations of peaks of breathers solutions in the lattice, and the stability of these solutions depend sensitively on initial conditions. Finally, we show that localization phenomenon is controlled by nonlinearity, and that discrete breathers result effectively from dispersion and nonlinearity.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les réseaux harmoniques sont des réseaux pour lesquels les forces de couplage entre particules sont linéaires. Dans la nature, on trouve que dans un cristal, l'arrangement périodique parfait peut s'étendre sur plusieurs milliers d'atomes avant que la symétrie translationnelle soit interrompue. Typiquement, cela est manifesté par la présence d'impuretés ou de défauts tels que les vides atomiques (atomes manquants) ou des atomes interstitiels. Ou alors, il pourrait être que le réseau soit désordonné ; cela veut dire que les couplages interparticulaires sont aléatoires.

Il est bien connu que les modes vibrationnels localisés peuvent apparaître dans les réseaux harmoniques lorsque des imperfections du type mentionné ci-dessus sont présentes. Par exemple, Maradudin a écrit dans [1] que, "lorsqu'un atome impur est introduit dans un cristal, les fréquences des modes normaux de vibration des atomes dans le cristal et le type des déplacements atomiques dans ces modes peuvent être profondément altérés".

Les modes localisés ont aussi lieu dans les réseaux désordonnés lorsqu'il y a un niveau de désordre suffisamment élevé. Intuitivement, certains types d'ondes deviennent piégées, et le désordre empêche complètement la propagation de tout paquet d'ondes initial. Ce mécanisme de localisation induit par le désordre dans les réseaux parfaits est connu comme étant "*la localisation d'Anderson*", et les formes d'ondes résultantes sont "*les modes d'Anderson*"[2].

Ainsi, pendant que la possibilité des modes localisés dans les réseaux imparfaits est bien connue, dans les réseaux harmoniques parfaits, on s'attend typiquement, seulement aux solutions ondes planes étendues. Comme relevé par Campbell *et al* [3], jusqu'à relativement récemment, cette notion était pensée s'étendre à toute structure périodique dépourvue d'imperfections extrin-

sèques. Il était cependant surprenant, quand Sievers et Taneko [4] proposaient que les modes localisés pouvaient très généralement exister dans les réseaux parfaits, mais anharmoniques, c'est-à-dire des réseaux avec interactions non linéaires entre particules. Puisque les occurrences de ce nouveau type de localisation dépendent des propriétés du réseau lui-même, et non des défauts extrinsèques, ils renvoient aux modes correspondant comme "*modes localisés intrinsèques*". Ces excitations ont acquis depuis une quantité d'autres noms, incluant "*breathers discrets*", "*excitations non linéaires localisées*", "*oscillations localisées*", "*modes anharmoniques auto-localisés*", et sans doute plusieurs autres noms aussi.

Depuis les travaux effectués par Korteweg et de Vries (KdV) consistant à établir un modèle d'équation d'onde hydrodynamique non linéaire connue sous le nom d'équation KdV pour expliquer le phénomène observé par J. Scott Russel, à savoir l'évolution sur plusieurs miles d'une onde hydrodynamique se propageant à vitesse constante sans modification de son profil, il est établi que la dynamique de bon nombre de systèmes physiques est décrite par les équations aux dérivées partielles et/ou des équations différentielles non linéaires. De plus, bien des exemples de phénomènes prenant en compte la non-linéarité ont été établis et ceci pour des domaines aussi divers que ceux des télécommunications, de la biologie, de l'hydrodynamique et bien d'autres encore.

La physique non linéaire des systèmes discrets a été témoin d'énormes développements au cours de ces dernières années. En particulier, beaucoup d'attention a été accordé aux modes localisés intrinsèques, ou breathers discrets, qui résultent de la combinaison de la non-linéarité et de la dispersion. Ces excitations localisées ont été observées dans une large variété de systèmes différents [5, 6]. Bien que les breathers soient juste des solutions très particulières des systèmes non linéaires, le fait qu'ils apparaissent spontanément et persistent dans les simulations numériques avec une assez longue durée de vie suggèrent qu'ils doivent jouer un rôle important dans la dynamique des systèmes non linéaires. Ainsi, l'étude de ces solutions en elles-mêmes semble très utile pour comprendre les propriétés globales des systèmes non linéaires. Le concept de brea-

ther trouve des applications dans divers domaines. Ceux-ci incluent entre autres les cristaux photoniques [7], les jonctions Josephson supraconductrices [8], les cristaux granulaires [9], et les biopolymères [10]. Certains modèles élaborés pour comprendre certaines fonctions biologiques de base de l'ADN [11] sont basés sur l'auto-localisation spontanée de l'énergie vibrationnelle le long de la direction de ses molécules, qui peut être expliqué par la formation des breathers.

Un autre usage très prometteur des breathers réside dans l'utilisation des lignes de transmission électrique non linéaires pour le transport à très au haut débit de l'énergie et de l'information. La première ligne mono-inductance non linéaire et dispersive fut construite par Hirota et Suzuki [12] pour simuler analogiquement la propagation des solitons dans le réseau atomique de Toda [13, 14]. À la suite de ce travail, plusieurs scientifiques de part le monde se sont penchés sur l'étude des lignes électriques non linéaires. C'est dans la poursuite de cet effort scientifique que le présent travail trouve sa justification.

Dans ce mémoire, nous présentons une étude détaillée des breathers discrets dans un réseau de transmission électrique non linéaire, bi-inductance avec dissipation et source extérieure de tension sinusoïdale dans laquelle les modes localisés ont été observés expérimentalement [15, 16, 17]. Nous proposons un modèle théorique qui nous permet d'étudier systématiquement leur existence et leurs propriétés de stabilité. Ce mémoire est subdivisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous étudions les caractéristiques (courbes de l'intensité et de la capacité en fonction de la tension) de la diode varactor, élément non linéaire du circuit de la ligne dans le but de construire un modèle approprié de la cellule élémentaire. Les résultats de cette cellule élémentaire sont validés par la comparaison de ses courbes de résonance pour différentes valeurs de l'amplitude excitatrice. Nous établissons aussi les équations décrivant la ligne électrique entière.

Dans le second chapitre, nous présentons le concept de limite anti-continue et nous exposons les méthodes nous permettant de construire les solutions breathers et d'étudier leur stabilité.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les résultats des simulations numériques. Nous

étudions la formation spontanée des breathers et multibreathers à partir de l'instabilité modulationnelle, et nous étudions les propriétés de stabilité de ces solutions. Nous observons que les positions et le nombre final de pics des solutions breathers dépendent sensiblement des conditions initiales.

Nous achevons ce mémoire par une conclusion générale et des perspectives pour nos travaux futurs.

PRÉSENTATION DU MODÈLE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les caractéristiques (intensité et capacitance en fonction de la tension) de la diode varactor, élément non linéaire du circuit dans le but de construire le modèle approprié de la cellule électrique élémentaire et celui de la ligne électrique entière. Les résultats pour la cellule élémentaire sont validés par la comparaison de ses courbes de résonance pour différentes valeurs de l'amplitude de la tension excitatrice. Nous établissons également les équations régissant la dynamique de la cellule élémentaire et de la ligne électrique entière. À partir des équations de la ligne nous établissons la relation de dispersion linéaire, qui nous permet de déterminer le domaine d'existence des solutions breathers. Ensuite nous modélisons la propagation des ondes dans la ligne par l'équation de Ginzburg-Landau Cubique Complexe et nous prouvons mathématiquement l'existence des solutions breathers.

1.2 Description du modèle

Notre modèle consiste en une ligne de transmission électrique bi-inductance discrète, non linéaire (voir figure 1.1). Elle peut être modélisée par une succession de tronçons contenant des composants linéaires et non linéaires. Elle est constituée de $N=32$ cellules élémentaires identiques. Chaque cellule élémentaire comporte une diode varactor (NTE 618) et une inductance $L_2 = 330\mu H$, et est excitée à travers une résistance $R = 10K\Omega$ par une source de tension

1.2. Description du modèle

sinusoïdale $V(t)$ d'amplitude V_d et de fréquence f . Les cellules élémentaires sont couplées entre elles à travers des inductances $L_1 = 680\mu H$. La ligne électrique a une structure en anneau (la dernière cellule est connectée à la première). Dans cette configuration, les conditions aux limites sont périodiques. C'est-à-dire que $V_{n+N} = V_n$ où V_n désigne la tension aux bornes de la diode de rang n . Pour la source de tension sinusoïdale, nous avons considéré des amplitudes de $V_d = 1V$ à $V_d = 5V$ et des fréquences de $f=200\text{ KHz}$ à $f=600\text{ KHz}$.

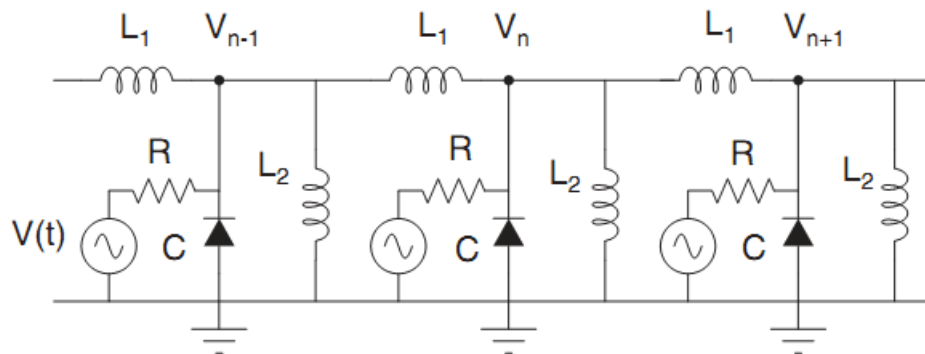


FIGURE 1.1 – Schéma de la ligne de transmission électrique.

En général, les résistances et les inductances sont essentiellement des composants d'impédance imparfaite; c'est-à-dire qu'ils ont en série et en parallèle, des éléments réactifs, capacitifs et résistifs. De plus, dû à la nature commerciale des éléments, les composants fabriqués sont sujets à des intervalles de tolérance, et la petite inhomogénéité spatiale résultante introduit une incertitude supplémentaire. Autres facteurs qui peuvent contribuer légèrement aux inhomogénéités sont les fils des inductances, aussi bien que les résistances de charge et de contact. Nous considérons le réseau suffisamment homogène, de sorte que la localisation soit contrôlée par la non-linéarité et non par le désordre (localisation d'Anderson). Cette hypothèse est validée par le fait que nous n'observons pas de localisation dans le régime linéaire (pour de petites amplitudes de l'excitateur). Comme principe directeur, nous avons pour but de construire un modèle qui soit le plus simple possible, avec un nombre limité de paramètres dont les valeurs

1.3. Choix de l'élément non linéaire

ont été tirées de l'article [24], mais qui soit tout de même capable de produire le phénomène principal, à savoir la localisation non linéaire et la formation des breathers discrets.

1.3 Choix de l'élément non linéaire

Commençons par préciser qu'une ligne est dite linéaire lorsqu'elle est composée uniquement d'éléments ayant des valeurs constantes et fixées. Par contre, une ligne sera dite non linéaire si elle contient au moins un élément non linéaire. Un élément non linéaire est soit un élément actif dont les caractéristiques $I(V)$ varient en fonction du signal d'entrée ; soit un dipôle passif (résistance, self, condensateur) dont la valeur dépend de la tension appliquée à ses bornes ou de l'intensité du courant qui le traverse. Les éléments non linéaires les plus usuels sont construits à base d'éléments passifs. Par exemple, lorsque l'élément linéaire est une résistance dont la valeur varie avec la tension, nous obtenons une varistance [18]. La résistance peut aussi varier sous l'effet d'un champ magnétique (magnétorésistance) ou sous l'effet de la température (thermistance) [18]. Il est également possible d'utiliser comme élément non linéaire une inductance dont le coefficient de la self L varie avec la tension appliquée à ses bornes [19, 20].

Si les pertes d'énergie ne sont plus à démontrer dans les résistances fussent-elles non linéaires [18], il est établi que la circulation du courant dans le noyau de la self provoque indubitablement un effet joule qui est accentué aux hautes fréquences par divers phénomènes (effet de peau par exemple). Par conséquent il y a perte d'énergie dans le noyau de la bobine. Le phénomène de saturation rend alors L indépendant du courant I qui traverse la self et le phénomène d'hystérésis ne permet plus de définir le flux comme une fonction univoque de I .

Fort de ces insuffisances présentées par les self et les résistances non linéaires, la plupart des travaux sur les lignes électriques non linéaires sont conduits en considérant les condensateurs comme éléments non linéaires [12, 21, 22, 23].

Un condensateur non linéaire présente une capacité qui varie en fonction de la tension appliquée à ses bornes. Les capacités non linéaires sont disponibles sous forme de diodes varicap (diode

1.4. Modélisation de la diode varactor

à capacité variable) polarisé en inverse (voir figure 1.2).

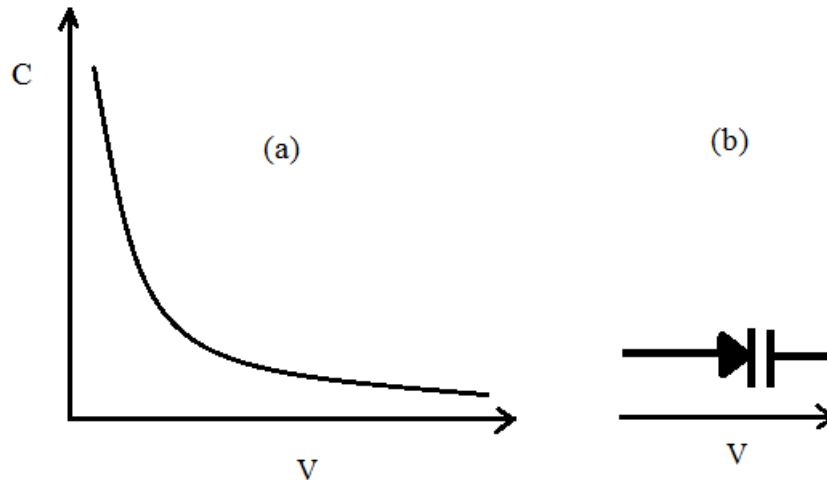


FIGURE 1.2 – Capacité non linéaire $C(V)$ (Figure (a)) obtenue avec une diode varicap polarisée en inverse (Figure (b)).

Dans ce travail, nous avons choisi des diodes varactor comme éléments non linéaires.

1.4 Modélisation de la diode varactor

Chacune des diodes varactor peut être modélisée par un condensateur non linéaire en parallèle avec une diode [24] comme le montre la figure ci-dessous.

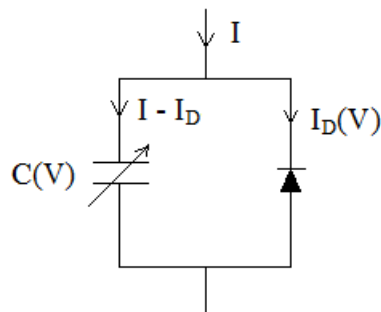


FIGURE 1.3 – Modèle de la diode varactor.

1.4. Modélisation de la diode varactor

Le courant circulant dans la résistance non linéaire est donnée par [24] :

$$I_D(V) = -I_S \exp(-\beta V) \quad (1.1)$$

Où $\beta = 38,8V^{-1}$ et $I_S = 1,25 \times 10^{-14}A$ (Nous considérons une tension négative lorsque la diode varactor est polarisée dans le sens direct).

La capacité non linéaire peut être modélisée par [24] :

$$C(V) = \begin{cases} C_v + C_w(V') + C(V')^2 & \text{si } V \leq V_c \\ C_0 \exp(-\alpha V) & \text{si } V > V_c \end{cases} \quad (1.2)$$

Où $V' = V - V_c$, $C_0 = 788pF$, $\alpha = 0,456V^{-1}$, $C_v = C_0 \exp(-\alpha V_c)$, $C_w = -\alpha C_v$ (la capacité et sa dérivée première sont continus en $V = V_c$), $C = 100nF$ et $V_c = -0,28V$.

Sur la figure 1.4, nous représentons des approximations numériques pour $I_D(V)$ et $C(V)$.

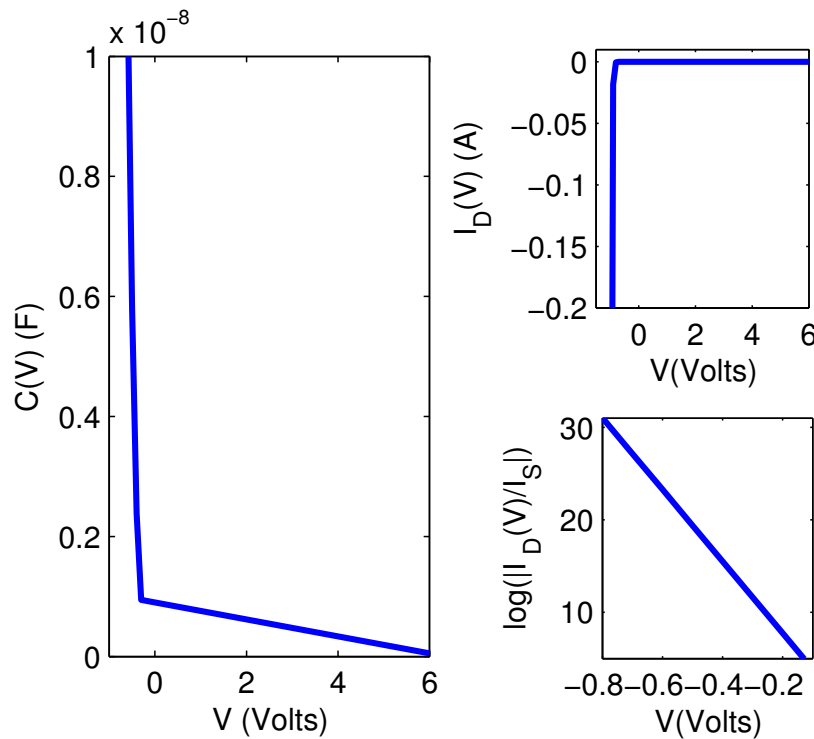


FIGURE 1.4 – Approximations numériques de $C(V)$, $I_D(V)$ et $\log(|I_D(V)/I_S|)$ pour la diode varactor

1.5 Modélisation de la dissipation

Dans la gamme de fréquences considérées ($200\text{KHz} \leq f \leq 600\text{KHz}$), les effets capacitifs sont négligeables par rapport aux effets inductifs, mais les inductances possèdent de faibles résistances ohmiques en régime continu qui est de l'ordre de 2Ω . Les inductances et les diodes varactor sont des sources d'amortissement en régime alternatif. Cependant, nous n'avons pas de données reliées aux paramètres de dissipation. Dans le but d'introduire les effets dissipatifs, nous modéliserons phénoménologiquement la dissipation au moyen d'un terme global donné par une résistance R_l , qui apparaît dans chaque cellule élémentaire, en parallèle avec L_2 [24].

1.6 Modélisation de la cellule élémentaire

Le modèle de la cellule élémentaire est donné par la figure 1.5

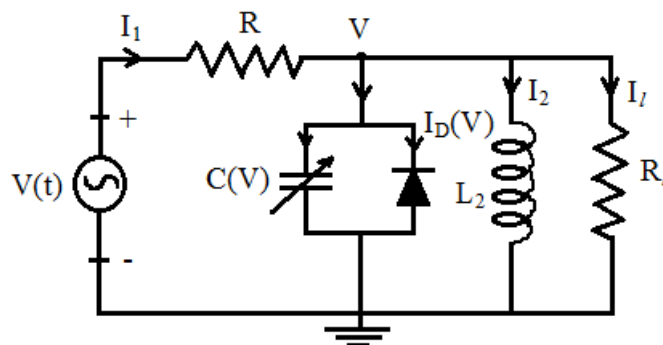


FIGURE 1.5 – *Modèle de la cellule élémentaire.*

1.6. Modélisation de la cellule élémentaire

En appliquant les lois de Kirchhoff au circuit ci-dessus, on obtient les équations ci-dessous :

$$V = L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (1.3)$$

$$V = R_l I_l \quad (1.4)$$

$$V = V(t) - R I_1 \quad (1.5)$$

$$I_1 - I_2 - I_l - I_D(V) = C(V) \frac{dV}{dt} \quad (1.6)$$

À partir des équations (1.4) et (1.5), on obtient :

$$I_l = \frac{V}{R_l} \quad (1.7)$$

$$I_1 = \frac{V(t)}{R} - \frac{V}{R} \quad (1.8)$$

En introduisant les relations (1.7) et (1.8) dans l'équation (1.6), on obtient l'équation (1.9) :

$$\frac{V(t)}{R} - \frac{V}{R} - I_2 - \frac{V}{R_l} - I_D(V) = C(V) \frac{dV}{dt} \quad (1.9)$$

La tension sinusoïdale $V(t)$ est donnée par :

$$V(t) = V_d \cos(\omega t) \quad (1.10)$$

En introduisant la relation (1.10) dans (1.9) on a :

$$C(V) \frac{dV}{dt} = -I_2 - I_D(V) + \frac{V_d \cos(\omega t)}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right)V \quad (1.11)$$

En posant $Y = -I_2$, l'équation (1.11) devient :

$$C(V) \frac{dV}{dt} = Y - I_D(V) + \frac{V_d \cos(\omega t)}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right)V \quad (1.12)$$

À partir de l'équation (1.3) on a :

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{V}{L_2} \quad (1.13)$$

Nous aboutissons ainsi aux équations du circuit de la cellule élémentaire.

$$\begin{cases} C(V) \frac{dV}{dt} = Y - I_D(V) + \frac{V_d \cos(\omega t)}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right)V \\ \frac{dY}{dt} = -\frac{V}{L_2} \end{cases} \quad (1.14)$$

1.6. Modélisation de la cellule élémentaire

En utilisant les variables d'adimensionnement :

$$\tau = \omega_0 t \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_0}},$$

$$v = \frac{V}{V_d}, i_D = \frac{I_D}{\omega_0 C_0 V_d}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, c(v) = \frac{C(V)}{C_0}, y = \frac{Y}{\omega_0 C_0 V_d},$$

les équations du système (1.14) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{c(v)} \left[\frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v + (y - i_D) \right] \\ \frac{dy}{d\tau} = -v \end{cases} \quad (1.15)$$

Afin de tracer les courbes de résonance de la cellule élémentaire, pour chaque valeur de l'amplitude de la tension excitatrice V_d , nous faisons correspondre une valeur de la résistance R_l . Les valeurs choisies sont consignées dans le tableau ci-dessous.

V_d (Volts)	1	2	3	4	5
R_l (Ω)	15000	10000	6000	5000	4500

TABLE 1.1 – Valeurs des résistances R_l correspondant aux différentes valeurs des amplitudes de la tension excitatrice [24].

En effectuant les simulations numériques des équations (1.15), nous avons obtenu les courbes de résonance non linéaire présentées sur la figure 1.6

Nous constatons que toutes les courbes ont la même allure. Ceci montre que les valeurs des paramètres de dissipation R_l correspondant aux valeurs de V_d ont été bien choisies. Les valeurs des fréquences de résonance sont comprises entre 300KHz et 400KHz; ceci montre que la gamme de fréquences considérées a été également bien choisie. Au fur et à mesure que l'amplitude de la tension excitatrice V_d augmente, la courbe de résonance se replie vers la gauche et la fréquence de résonance diminue, prouvant ainsi la non linéarité de l'oscillateur que constitue la cellule élémentaire. Ces observations valident les résultats obtenus pour la cellule élémentaire.

1.7. Modélisation de la ligne électrique entière

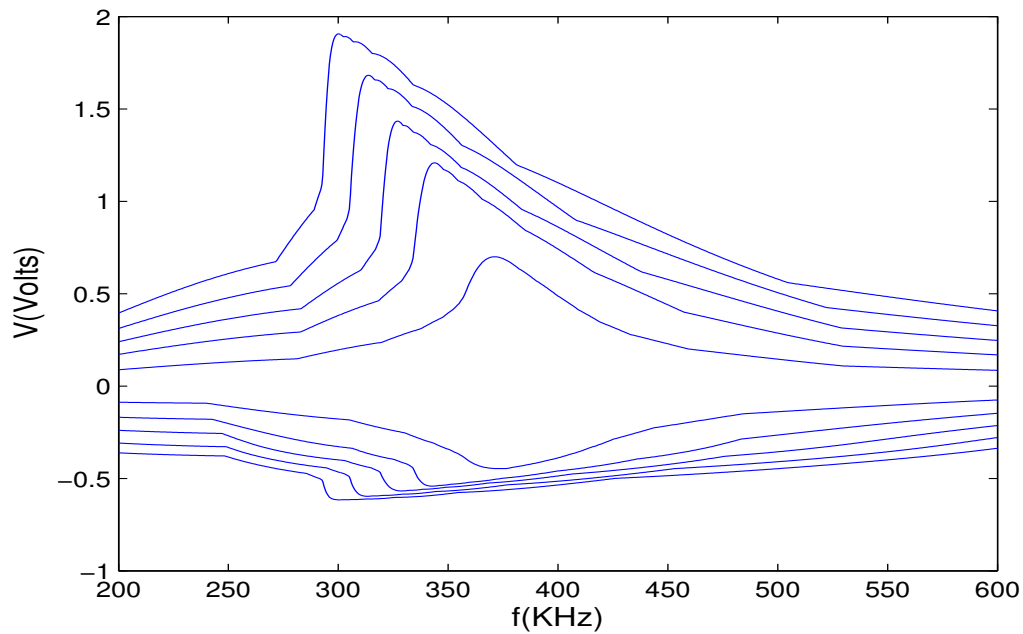


FIGURE 1.6 – Courbes de résonance non linéaire correspondant à la cellule élémentaire. De bas en haut : $V_d=1,2,3,4$ et $5V$.

1.7 Modélisation de la ligne électrique entière

Le modèle de la ligne électrique entière est donné par la figure 1.7.

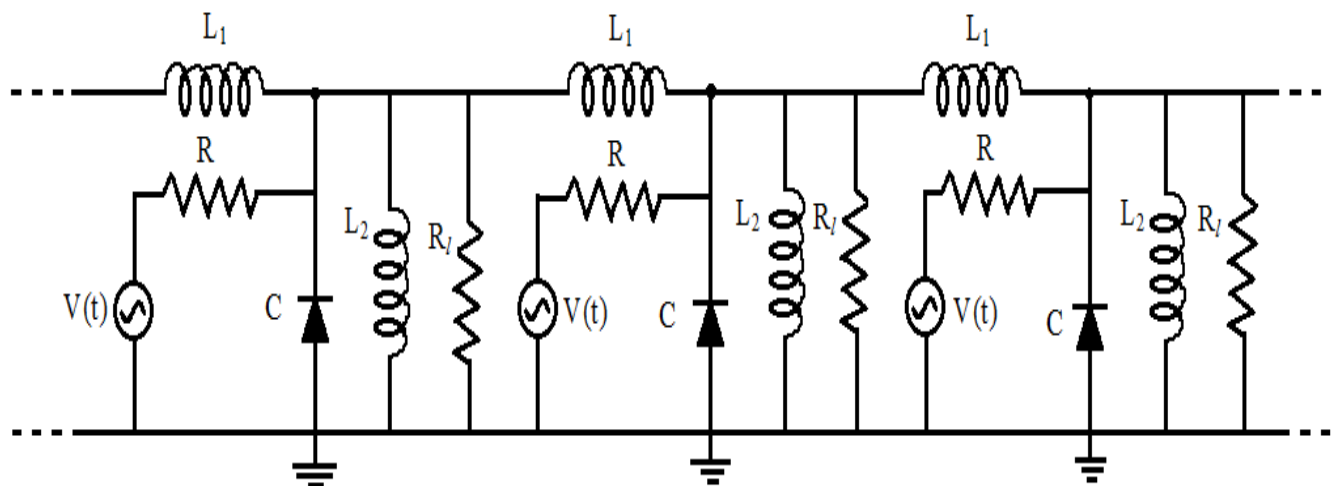


FIGURE 1.7 – Modèle de la ligne électrique entière.

1.7. Modélisation de la ligne électrique entière

Pour obtenir les équations caractéristiques du circuit de la figure 1.7, nous avons jugé nécessaire de ressortir de façon détaillée la cellule de rang n . Pour cela, une représentation de cette cellule et de ses proches voisines (cellules de rang $n-1$ et $n+1$) est donnée par la figure 1.8. Elle permet de voir les différentes intensités et tensions appliquées à la cellule de rang n .

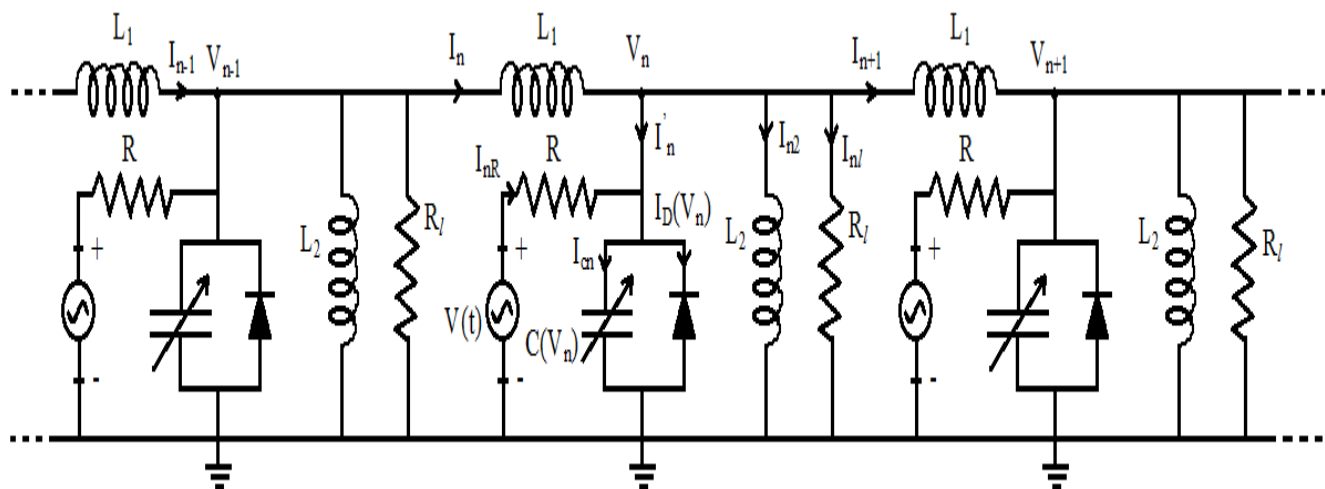


FIGURE 1.8 – *Présentation détaillée de la cellule de rang n dans la ligne entière.*

L'application des lois de Kirchhoff conduit aux équations suivantes :

$$V_{n-1} - V_n = L_1 \frac{dI_n}{dt} \quad (1.16)$$

$$V_n - V_{n+1} = L_1 \frac{dI_{n+1}}{dt} \quad (1.17)$$

$$V_n = V(t) - RI_{nR} \quad (1.18)$$

$$V_n = L_2 \frac{dI_{n2}}{dt} \quad (1.19)$$

$$V_n = R_l I_{nl} \quad (1.20)$$

$$C(V_n) \frac{dV_n}{dt} = I_n - I_{n+1} - I_{n2} - \frac{V_n}{R_l} - I_D(V_n) + I_{nR} \quad (1.21)$$

De l'expression (1.18), il vient :

$$I_{nR} = \frac{V(t)}{R} - \frac{V_n}{R} \quad (1.22)$$

1.7. Modélisation de la ligne électrique entière

En remplaçant I_{nR} par son expression dans (1.21), il vient :

$$C(V_n) \frac{dV_n}{dt} = I_n - I_{n+1} - I_{n2} - I_D(V_n) + \frac{V(t)}{R} - \frac{V_n}{R} - \frac{V_n}{R_l} \quad (1.23)$$

De la relation (1.19), il vient :

$$\frac{dI_{n2}}{dt} = \frac{V_n}{L_2} \quad (1.24)$$

En faisant la différence des équations (1.16) et (1.17), on obtient :

$$\frac{d}{dt}(I_n - I_{n+1}) = \frac{1}{L_1}(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \quad (1.25)$$

En posant $Y_n = I_n - I_{n+1} - I_{n2}$, on obtient :

$$\frac{dY_n}{dt} = \frac{1}{L_1}(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) - \frac{V_n}{L_2} \quad (1.26)$$

En multipliant l'équation (1.26) par L_2 , on obtient :

$$L_2 \frac{dY_n}{dt} = \frac{L_2}{L_1}(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) - V_n \quad (1.27)$$

En associant les équations (1.23) et (1.27) et en remplaçant $V(t)$ par son expression $V(t) = V_d \cos(\omega t)$, nous obtenons le système d'équations couplées ci-dessous :

$$\begin{cases} C(V_n) \frac{dV_n}{dt} = Y_n - I_D(V_n) + \frac{V_d \cos(\omega t)}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right)V_n \\ L_2 \frac{dY_n}{dt} = \frac{L_2}{L_1}(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) - V_n \end{cases} \quad (1.28)$$

En utilisant les variables d'adimensionnement ci-dessous,

$$\tau = \omega_0 t \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_0}},$$

$$v_n = \frac{V_n}{V_d}, \quad i_D(v_n) = \frac{I_D(V_n)}{\omega_0 C_0 V_d}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad c(v_n) = \frac{C(V_n)}{C_0}, \quad y_n = \frac{Y_n}{\omega_0 C_0 V_d},$$

le système (1.28) devient :

$$\begin{cases} c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} = y_n - i_D(v_n) + \frac{\cos(\Omega \tau)}{RC_0 \omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right)v_n \\ \frac{dy_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1}(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) - v_n \end{cases} \quad (1.29)$$

1.8. Relation de dispersion linéaire

avec $n = 1, 2, \dots, N$.

N étant le nombre de cellules considérées dans la ligne bi-inductance non linéaire. Les relations (1.29) constituent un système de $2N$ équations discrètes, non linéaires et couplées. Ces équations régissent la dynamique de la ligne de transmission bi-inductance.

1.8 Relation de dispersion linéaire

Afin d'établir la relation de dispersion linéaire, nous devons linéariser les équations (1.29). Pour cela, nous supprimons les éléments non linéaires de la ligne à savoir les diodes et les sources de tension sinusoïdale. La capacité variable $C(V)$ est maintenant constante et sa valeur est fixée à C_0 , et nous négligeons la dissipation. Dans ce cas, les équations (1.29) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{dv_n}{d\tau} = y_n \\ \frac{dy_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1}(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) - v_n \end{cases} \quad (1.30)$$

En dérivant la première équation de (1.30) et en remplaçant $\frac{dy_n}{d\tau}$ par son expression dans le résultat obtenu, on obtient l'équation ci-dessous :

$$\frac{d^2v_n}{d\tau^2} = \frac{L_2}{L_1}(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) - v_n \quad (1.31)$$

Considérons les solutions de l'équation (1.31) sous la forme d'ondes planes de faibles amplitudes

$$v_n = v_0 \exp[j(kn - \Omega\tau)] \quad (1.32)$$

En substituant v_n dans (1.31), on obtient :

$$\Omega^2 = 1 + 4\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1.33)$$

En remplaçant Ω par son expression $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient la relation de dispersion linéaire

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4u_0^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1.34)$$

1.8. Relation de dispersion linéaire

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_0}}$ et $u_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_0}}$

Dans la relation (1.34), k est le vecteur d'onde et ω sa pulsation ou fréquence angulaire. Le résultat (1.34) est représenté sur la figure (1.9) pour les vecteurs d'ondes k pris dans la première zone de Brillouin, c'est-à-dire $0 \leq k \leq \pi$.

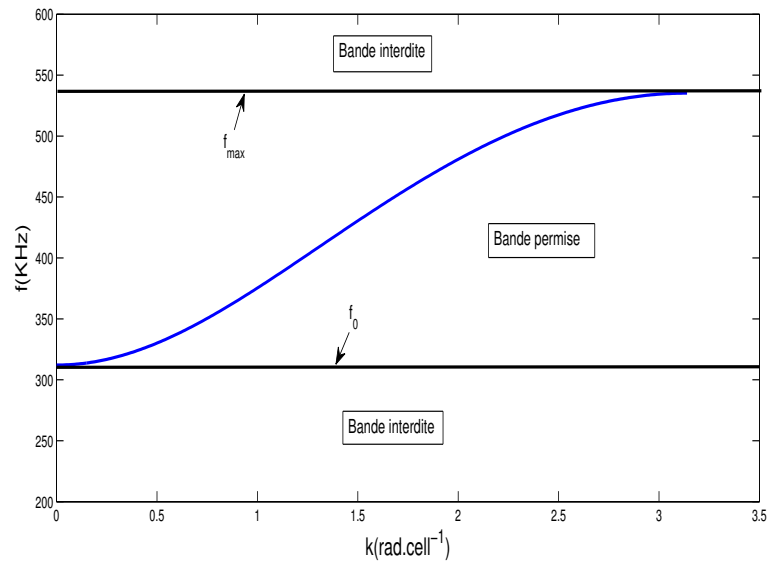


FIGURE 1.9 – Courbe de dispersion linéaire de la ligne bi-inductance.

Puisque $0 \leq \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) \leq 1$ et que $\omega = 2\pi f$, de la relation (1.34), on trouve que :

$$\omega_0 \leq \omega \leq \sqrt{\omega_0^2 + 4u_0^2} \quad (1.35)$$

et par suite que :

$$f_0 \leq f \leq f_{max} \quad (1.36)$$

avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et $f_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 + 4u_0^2}$

Les fréquences f_0 et f_{max} sont appelées fréquences de coupure. f_0 est appelée fréquence de coupure basse et f_{max} est appelée fréquence de coupure haute. La fréquence de coupure basse est due à l'inductance L_2 . La fréquence de coupure haute est due à la discrétisation de l'espace, elle disparaît dans l'approximation des milieux continus. $f_0 \leq f \leq f_{max}$ signifie que les ondes planes de faibles amplitudes de fréquences inférieures à f_0 et supérieures à f_{max} ne peuvent se propager dans la ligne.

1.9. Existence des breathers discrets dans le réseau

L'intervalle de fréquences $[f_0, f_{max}]$ est appelé bande permise ou bande phonon. De façon générale, les intervalles de fréquences $[0, f_0[$ et $]f_{max}, +\infty[$ sont appelés bandes interdites. Mais puisque la gamme de fréquences que nous étudions s'étend de 200KHz à 600KHz, ces intervalles deviennent respectivement $[200, f_0[$ et $]f_{max}, 600]$. La forme en S de la courbe de dispersion montre que la ligne électrique bi-inductance est un filtre électrique passe-bande dont les fréquences de coupure sont f_0 et f_{max} [25, 15].

En utilisant les paramètres de la ligne que nous rappelons ci-dessous,

$$L_1 = 680\mu H, L_2 = 330\mu H, R = 10K\Omega, C_0 = 788pF, C = 100nF, V_c = -0,28V, \alpha = 0,456V^{-1}, \\ \beta = 38,8V^{-1}, I_s = 1,25 \times 10^{-14}A$$

les valeurs numériques des fréquences de coupure sont les suivantes :

$$f_0 = 312,104KHz \text{ et } f_{max} = 535,255KHz.$$

Ceci justifie le choix de la gamme de fréquences étudiées $200KHz \leq f \leq 600KHz$.

1.9 Existence des breathers discrets dans le réseau

Les breathers discrets sont des excitations localisées dans l'espace et périodiques dans le temps, dans les réseaux non linéaires invariants par translation. Illustrativement, une excitation de type breather peut apparaître comme une version non linéaire discrète du paquet d'ondes linéaires bien connu. C'est-à-dire qu'ils prennent la forme d'une onde porteuse avec une enveloppe en forme de cloche [26]. Une discussion qualitative sur les breathers discrets remonte à Ovshinnikov [27], pendant que Kosevitch et Kovalev [28] semblent avoir été les premiers à essayer de trouver une solution breather dans un réseau de type Klein-Gordon. Toutefois c'était Sievers et Taneko [4] qui conjecturaient les premiers que les breathers à longue durée de vie apparaîtraient généralement dans les réseaux non linéaires.

1.10 Domaine d'existence des breathers discrets dans le réseau

Il est habituellement pensé que le domaine d'existence des breathers est limité par la condition que sa fréquence f_b et ses harmoniques sont en dehors de la bande phonon [29]. Cette condition est appelée "*condition de non-résonance*". En fait, cette condition de non-résonance n'est valable que dans les systèmes Hamiltoniens discrets. Ce n'est que l'année dernière, c'est-à-dire en 2012, que L.Q. English *et al* [58] ont découvert que dans les systèmes dissipatifs et forcés comme le nôtre, il est possible de générer des breathers en résonance avec la bande phonon. Les modes non linéaires localisés intrinsèques (breathers discrets) qui apparaissent en dessous de la bande phonon ont un caractère acoustique (les cellules électriques adjacentes oscillent en phase) et sont appelés "breathers discrets réguliers", tandis que ceux qui apparaissent dans et au-dessus de la bande phonon ont un caractère optique (les cellules électriques adjacentes oscillent en déphasage) [30] et sont appelés "breathers discrets subharmoniques" [58]. Dans notre cas, nous avons vu que la fréquence de résonance diminue avec l'amplitude, donc nous pouvons générer des breathers avec des fréquences en dessous de la bande phonon [26, 30]. Dans notre étude, nous nous limiterons donc aux breathers apparaissant en dessous de la bande phonon, c'est-à-dire aux breathers réguliers.

1.11 Équation de propagation des ondes non linéaires

Pour comprendre la dynamique des excitations non linéaires dans notre ligne bi-inductance et non linéaire de la figure (1.1), il faut résoudre le système (1.29). Malheureusement ce système est complexe et il n'y a actuellement aucune technique mathématique permettant de le résoudre de façon exacte. Néanmoins, des méthodes d'approximation ont été proposées sur des systèmes similaires. Il s'agit notamment de l'approximation des milieux continus (AMC) et de l'approximation semi-discrète (ASD).

1.11. Équation de propagation des ondes non linéaires

1.11.1 Approximation des milieux continus

L'approximation des milieux continus (AMC) est la transformation qui permet de remplacer les variables discrètes d'un système physique donné par des variables continus. Dans le cas spécifique de notre ligne, l'AMC n'est applicable que si les tensions entre les cellules successives sont voisines. Nous ne pouvons pas savoir à priori si cette condition est vérifiée dans notre cas. Toutefois, en se limitant aux excitations dont l'enveloppe varie peu d'une cellule à l'autre, nous pouvons étendre cette approximation en développant en série de Taylor les tensions $V_{n\pm 1}$, $V_{n\pm 2}$, ...

Dans ces conditions, la ligne perd son caractère discret et peut être assimilée à un milieu continu. Ainsi, la variable discrète n est substituée par la variable continue $x = n\epsilon$, où ϵ désigne l'écart existant entre deux cellules voisines.

De ce fait, nous avons :

$$V_n(t) \longrightarrow V(x, t) \quad (1.37)$$

et les termes d'interactions deviennent :

$$V_{n\pm 1} \longrightarrow V(n \pm 1, t) = V \pm \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + o(\epsilon^3) \quad (1.38)$$

en se limitant à l'ordre deux.

1.11.2 Approximation semi-discrète

L'approximation semi-discrète (ASD) est une approche intermédiaire associant l'approximation des milieux continus et l'approximation discrète. En effet, l'ASD impose que l'enveloppe du signal soit traitée dans l'approximation des milieux continus et sa porteuse soit considérée avec son caractère discret. Cette approximation consiste à se limiter au cas du couplage fort entre les cellules de la ligne. En d'autres termes, les tensions entre deux cellules voisines V_n et $V_{n\pm 1}$ restent proches. Ainsi l'enveloppe de l'excitation passe continuellement d'une cellule à l'autre pendant que la phase subit le caractère discret du milieu de propagation.

1.11. Équation de propagation des ondes non linéaires

Dans la suite, nous allons chercher des solutions oscillatoires du système d'équations (1.29) dans l'approximation semi-discrète. Dans cette limite semi-discrète, nous suivons la procédure standard de la méthode de perturbation réductive [31] pour exprimer la solution oscillatoire de la tension $V_n(t)$ sous la forme générale :

$$V_n(t) = \sum_{l,m} \varepsilon^l V_{lm}(x, t) e^{im\theta(n,t)} + C.C \quad (1.39)$$

dans laquelle ε est un paramètre petit désignant la perturbation ;

$V_{lm}(x, t)$ désigne l'enveloppe de l'onde ;

$e^{im\theta(n,t)}$ représente sa porteuse ;

l, m sont des constantes qui désignent respectivement l'ordre de grandeur de la perturbation et l'ordre de grandeur des fréquences susceptibles d'être créés à partir de la fréquence fondamentale ;

$C.C$ représente le complexe conjugué du premier terme ;

Il a été démontré que l'expression (1.39) ne contient que trois termes importants non nuls [32, 33].

La contribution des autres termes non nuls est supposée n'être qu'une correction [34].

Dans ce cas la tension $V_n(t)$ s'écrit :

$$V_n(t) = \varepsilon V_{11}(x, t) e^{i\theta(n,t)} + c.c + \varepsilon^2 [V_{20}(x, t) + V_{22}(x, t) e^{2i\theta(n,t)} + c.c] \quad (1.40)$$

La phase $\theta(n, t)$ est définie par :

$$\theta(n, t) = kn - \omega t \quad (1.41)$$

où k et ω sont respectivement le vecteur d'onde et la fréquence angulaire de la porteuse.

V_{11} et V_{22} sont des tensions complexes.

Nous supposons dans nos calculs que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \varepsilon \quad (1.42)$$

1.11. Équation de propagation des ondes non linéaires

Ceci traduit de lentes variations de l'enveloppe dans le temps et dans l'espace.

D'autre part, il apparaît dans nos calculs des termes non nuls du type $V_{n\pm 1}(t)$ qu'il faut définir. Pour y parvenir, les tensions $V_{11}(n \pm 1, t)$, $V_{20}(n \pm 1, t)$, $V_{22}(n \pm 1, t)$ sont exprimées en faisant usage de l'approximation des milieux continus (équation (1.38)) autour de $V_{11}(x, t)$, $V_{20}(x, t)$, $V_{22}(x, t)$ respectivement avec $x = n\varepsilon$.

1.11.3 Équation de Ginzburg-Landau Cubique Complexe

Afin de déterminer l'équation d'amplitude des ondes dans l'approximation semi-discrète, nous reconsidérons les équations de base avec dimension de la ligne bi-inductance (1.28) :

$$\begin{cases} C(V_n) \frac{dV_n}{dt} = Y_n - I_D(V_n) + \frac{V_d \cos(\omega t)}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right) V_n \\ L_2 \frac{dY_n}{dt} = \frac{L_2}{L_1} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) - V_n \end{cases} \quad (1.43)$$

L'équation $C(V_n) \frac{dV_n}{dt} = Y_n - I_D(V_n) + \frac{V_d \cos(\omega t)}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right) V_n$ s'écrit encore :

$$\frac{dQ_n}{dt} = Y_n - I_D(V_n) + \frac{V_d \cos(\omega t)}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}\right) V_n \quad (1.44)$$

puisque

$$dQ_n = C(V_n) dV_n \quad (1.45)$$

En intégrant (1.45), on a :

$$Q_n = \int C(V_n) dV_n \quad (1.46)$$

Dans le cas où $V_n > V_c$, $C(V_n) = C_0 e^{-\alpha V_n}$ d'après (1.2).

Rappelons que $I_D(V_n) = -I_s \exp(-\beta V_n)$.

En effectuant un développement limité à l'ordre deux de $C(V_n)$ et de $I_D(V_n)$, on a :

1.11. Équation de propagation des ondes non linéaires

$$C(V_n) = C_0(1 - \alpha V_n + \frac{\alpha^2}{2} V_n^2) \quad (1.47)$$

$$I_D(V_n) = -I_s(1 - \beta V_n + \frac{\beta^2}{2} V_n^2) \quad (1.48)$$

En intégrant (1.47) on obtient :

$$Q_n = C_0(V_n - \frac{\alpha^2}{2} V_n^2 + \frac{\alpha^3}{6} V_n^3) \quad (1.49)$$

Lorsqu'on dérive l'expression (1.44) et que l'on y insère l'expression de $\frac{dV_n}{dt}$ et les expressions (1.48) et (1.49) dans le résultat obtenu, on obtient le système d'équations non linéaires ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_n}{dt^2} - u_0^2(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) + \omega_0^2 V_n &= -\frac{1}{C_0} (\beta I_s + \frac{1}{R_e}) \frac{dV_n}{dt} + \\ \frac{I_s \beta^2}{2C_0} \frac{d(V_n^2)}{dt} + \frac{\alpha}{2} \frac{d^2(V_n^2)}{dt^2} - \frac{\alpha^2}{6} \frac{d^2(V_n^3)}{dt^2} - \frac{\omega V_d}{RC_0} \sin(\omega t) & \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\text{avec } u_0^2 = \frac{1}{L_1 C_0}, \omega_0^2 = \frac{1}{L_2 C_0} \text{ et } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_l}$$

Posons :

$$a = \frac{1}{C_0} (\beta I_s + \frac{1}{R_e}); b = \frac{I_s \beta^2}{2C_0}; c = \frac{\alpha}{2}; d = \frac{\alpha^2}{6}; e = \frac{\omega V_d}{RC_0} \quad (1.51)$$

Pour trouver l'équation d'amplitude des ondes dans l'approximation semi-discrète pour la ligne bi-inductance, nous substituons $V_n(t)$ (équation (1.40)) et ses dérivées respectives dans le système d'équations (1.50). En négligeant les termes en $e^{in\theta}$ avec $n = \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ et les termes en ε^m avec $m \geq 5$, on obtient les équations dépendants de l'ordre de ε et de l'harmonique considérée suivantes :

1.11. Équation de propagation des ondes non linéaires

◆ Équation en $(\varepsilon, e^{i\theta})$:

$$-\omega^2 V_{11} - 2u_0^2(\cos k - 1)V_{11} + \omega_0^2 V_{11} = 0 \quad (1.52)$$

De cette équation, nous déduisons la relation de dispersion linéaire que nous avons déjà obtenue en (1.34) soit : $\omega^2 = \omega_0^2 + 4u_0^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)$

◆ Équation en $(\varepsilon^4, e^{0i\theta})$:

$$\frac{\partial^2 V_{20}}{\partial t^2} - u_0^2 \frac{\partial^2 V_{20}}{\partial x^2} - 2c \frac{\partial^2 (|V_{11}|^2)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.53)$$

En posant $\xi = \varepsilon(x - V_g t)$ où V_g est la vitesse de groupe définie par :

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{u_0^2 \sin(k)}{\sqrt{\omega_0^2 + 4u_0^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)}} \quad (1.54)$$

l'équation (1.53) devient :

$$(V_g^2 - u_0^2)V_{20,\xi\xi} - 2cV_g^2(|V_{11}|^2)_{\xi\xi} \quad (1.55)$$

En intégrant cette équation on obtient :

$$V_{20} = \frac{2cV_g^2}{V_g^2 - u_0^2} |V_{11}|^2 \quad (1.56)$$

1.11. Équation de propagation des ondes non linéaires

◆ Équation en $(\varepsilon^2, e^{2i\theta})$

$$[-4\omega^2 - 2u_0^2(\cos 2k - 1) + \omega_0^2 - 2ia\omega] V_{22} = -4c\omega^2 V_{11}^2 \quad (1.57)$$

De cette équation on en déduit que :

$$V_{22} = \frac{4c\omega^2}{4(\omega^2 - u_0^2 \sin^2(k)) - \omega_0^2 + 2ia\omega} V_{11}^2 \quad (1.58)$$

◆ Équation en $(\varepsilon^3, e^{i\theta})$

$$-2i\omega V_{11,t} + V_{11,tt} - u_0^2 \cos(k) V_{11}'' + (2c\omega^2 + 2ib\omega)(V_{11}V_{20} + \overline{V_{11}}V_{22}) - 3d\omega^2 |V_{11}|^2 V_{11} = 0 \quad (1.59)$$

En utilisant les transformations de Galilée

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon(x - V_g t) \\ \tau = \varepsilon^2 t \end{cases} \quad (1.60)$$

l'équation (1.59) devient :

$$iV_{11,\tau} + PV_{11,\xi\xi} + Q|V_{11}|^2 V_{11} = 0 \quad (1.61)$$

Cette équation est appelée équation de Schrödinger non linéaire lorsque les coefficients P et Q sont tous deux réels. Dans notre cas, le coefficient Q est complexe. Par conséquent l'équation (1.61) est appelée équation de Ginzburg-Landau Cubique Complexe (GLCC).

Nous avons ainsi montré que l'évolution d'un paquet d'ondes dans la ligne bi-inductance non linéaire peut être modélisée par l'équation de Ginzburg-Landau Cubique Complexe.

1.12. Instabilité modulationnelle

Dans l'équation (1.61), les coefficients de dispersion P et de non linéarité Q sont donnés par :

$$P = P_r + iP_i \quad (1.62)$$

$$Q = Q_r + iQ_i \quad (1.63)$$

avec :

$$P_r = -\frac{u_0^2}{2\omega^3}(u_0^2 \sin^2 k - \omega^2 \cos k) \quad (1.64)$$

$$P_i = 0 \quad (1.65)$$

$$Q_r = \frac{2c^2 u_0^2 \omega \sin^2 k}{\omega_0^2 + 4u_0^2 \sin^4(\frac{k}{2})} - \frac{[4c^2(4(\omega^2 - u_0^2 \sin^2 k) - \omega_0^2) + 8abc] \omega^3}{[4(\omega^2 - u_0^2 \sin^2 k) - \omega_0^2]^2 + 4a^2 \omega^2} + \frac{3}{2} d\omega \quad (1.66)$$

$$Q_i = \frac{2bcu_0^2 \sin^2 k}{\omega_0^2 + 4u_0^2 \sin^4(\frac{k}{2})} - \frac{[4bc(4(\omega^2 - u_0^2 \sin^2 k) - \omega_0^2) - 8ac^2 \omega^2] \omega^2}{[4(\omega^2 - u_0^2 \sin^2 k) - \omega_0^2]^2 + 4a^2 \omega^2} \quad (1.67)$$

Physiquement, P_r mesure la dispersion linéaire de l'onde ; P_i représente l'accroissement des perturbations dont les spectres sont concentrés au voisinage du vecteur d'onde fondamental k ; Q_r détermine comment la fréquence est modulée par les effets non linéaires et Q_i mesure la saturation de l'onde instable [35, 36].

1.12 Instabilité modulationnelle

1.12.1 Définition

L'instabilité modulationnelle (IM) se rapporte au phénomène dans lequel une onde continue initialement perturbée tend à se briser spontanément en un train d'impulsions de type "solitons" lorsqu'elle se déplace dans un milieu dispersif et non linéaire [37].

Les milieux non linéaires sont bien connus pour laisser observer le phénomène d'instabilité modulationnelle [38, 39]. En effet, les solitons (ondes localisées de grandes amplitudes susceptibles de se

1.12. Instabilité modulationnelle

propager sur de grandes distances sans grandes modifications de ses caractéristiques-profil, vitesse-) jouent un rôle important dans un grand nombre de systèmes et y apparaissent sous diverses formes : kinks, antikinks, solitons trous, solitons pulses, etc ...

Les solitons pulses en particulier peuvent être interprétés comme le résultat de l'instabilité d'une onde plane se propageant dans le système sous l'effet de perturbations infinitésimales la conduisant à une auto-modulation dont l'étape finale est la fragmentation de l'onde en paquet d'ondes " isolés " appelés solitons pulses [40]. Le phénomène d'instabilité modulationnelle est un sujet de grand intérêt dans plusieurs branches de la physique. Il a été étudié pour les ondes dans un milieu diélectrique [41], en optique non linéaire [42, 43, 44], en physique des plasmas [45, 46, 47], en hydrodynamique [48], dans les lignes de transmissions électriques [20, 49, 50], dans les réseaux atomiques [51], dans les cellules biologiques [52, 53].

1.12.2 Critère d'instabilité modulationnelle

Le critère d'instabilité modulationnelle est la condition nécessaire et suffisante pour laquelle il y a instabilité modulationnelle d'une onde plane qui se propage dans la ligne bi-inductance non linéaire. Ce critère est donné par la relation [40] :

$$P_r Q_r + P_i Q_i > 0 \quad (1.68)$$

Lorsque ce critère est rempli, l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (1.61) admet des solutions solitons de type breather.

Dans les relations (1.64) à (1.67), nous avons défini les expressions de P_r , P_i , Q_r et Q_i . Puisque P_i est nul, le pseudo-produit $P_r Q_r + P_i Q_i$ se réduit au produit $P_r Q_r$. Les coefficients P_r et Q_r dépendent tous deux du vecteur d'onde k . En calculant analytiquement le produit $P_r Q_r$, nous ne pouvons pas déterminer son signe. C'est pourquoi nous avons représenté le produit $P_r Q_r$ pour les valeurs de k prises dans l'intervalle $0 \leq k \leq \pi$

1.13. Conclusion

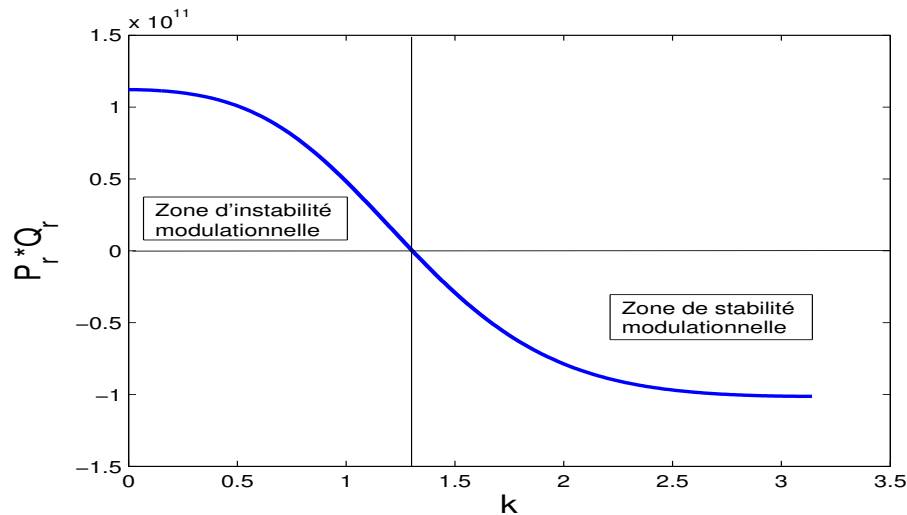


FIGURE 1.10 – Variations du produit $P_r Q_r$ en fonction de k

La figure (1.10) nous montre que pour les valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 1,31$, $P_r Q_r > 0$. Par conséquent, pour $k \in [0; 1,31]$ le critère d'instabilité modulationnelle est satisfait, et l'équation (1.61), de même que l'équation (1.29) admettent des solutions solitons de type breather.

1.13 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un modèle de ligne électrique non linéaire capable de produire le phénomène de localisation non linéaire et la formation des breathers discrets. Nous avons étudié en détail l'élément non linéaire de cette ligne électrique à savoir la diode varactor. Par la suite nous avons établi les équations régissant la dynamique de la ligne. Nous avons montré que l'évolution d'un paquet d'ondes dans la ligne peut être modélisée par l'équation de Ginzburg-Landau Cubique Complexe. En exploitant les coefficients de dispersion et de non linéarité apparaissant dans cette équation, nous avons prouvé mathématiquement l'existence des breathers discrets dans la ligne.

CONSTRUCTION DES SOLUTIONS BREATHERS À PARTIR DE LA LIMITE ANTI-CONTINUE ET ÉTUDE DE LA STABILITÉ LINÉAIRE DES SOLUTIONS

2.1 Introduction

Les solutions breathers encore appelées solutions modes localisés intrinsèques sont des solutions périodiques dans le temps et localisées spatialement des systèmes dynamiques non linéaires invariants par translation. Ces solutions sont connues depuis plusieurs années. Mais on les croyait généralement spécifiques aux modèles intégrables très particuliers, notamment le modèle bien connu de Sine-Gordon. Dans de tels systèmes, les breathers sont très instables et disparaissent sous la plupart des perturbations du modèle [54]. Bien que ce premier modèle où les breathers ont été découverts s'est révélé être complètement intégrable, leur existence n'exige pas en général l'intégrabilité du modèle correspondant.

Récemment, MacKay et Aubry [55] ont rigoureusement prouvé l'existence de plusieurs solutions

2.2. La limite anti-continue

infiniment périodiques dans le temps qui correspondent soit aux breathers simples, soit à une distribution arbitraire de breathers, chaotiques ou non. Leur preuve tient dans une large famille de modèles discrets, dans les réseaux finis ou infinis, de dimension quelconque.

Dans ce chapitre nous expliquons dans la première partie, le concept de limite anti-continue et nous montrons comment nous obtenons les solutions breathers à partir de la limite anti-continue. Dans la deuxième partie, nous étudions la stabilité linéaire de ces solutions au moyen de l'analyse de Floquet.

2.2 La limite anti-continue

La notion de limite anti-continue a été introduite par Aubry et Abramovici [56] pour trouver des solutions breathers dans le cadre de réseaux hamiltoniens, puis étendue dans le cadre de réseaux dissipatifs par Sepulchre et MacKay [57].

Avant de définir ce qu'est la limite anti-continue, rappelons d'abord les équations dont nous voulons construire les solutions. Il s'agit du système d'équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} = y_n - i_D(v_n) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_n \\ \frac{dy_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1} (v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) - v_n \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $n = 1, \dots, N$

Le rapport $\frac{L_2}{L_1}$ est appelé coefficient ou terme de couplage. Il dénote la force de couplage entre deux cellules électriques voisines. Ce ratio des deux inductances L_1 et L_2 produit le "caractère discret" effectif du système. Dans la limite où L_1 est beaucoup plus grand (respectivement beaucoup plus petit) que L_2 , le système peut être vu comme approchant la limite anti-continue (respectivement la limite continue) [58]. Dans notre réseau, $L_1 = 680\mu H$ et $L_2 = 330\mu H$, donc nous sommes clairement dans la limite anti-continue.

Dans la suite nous poserons $L = \frac{L_2}{L_1}$. Nous rappelons que nous cherchons des solutions périodiques dans le temps et localisées dans l'espace de l'équation (2.1). Considérons la limite où il n'y a pas

2.2. La limite anti-continue

de couplage dans le réseau. C'est cette limite qu'on appelle "limite anti-continue". Elle correspond à $L = 0$. Dans cette situation, le réseau se réduit à une chaîne d'oscillateurs non linéaires découplés, chacun gouverné par :

$$\begin{cases} c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} = y_n - i_D(v_n) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_n \\ \frac{dy_n}{d\tau} = -v_n \end{cases} \quad (2.2)$$

Cette limite était autrefois appelée "limite anti-intégrable". Mais cette terminologie peut être trompeuse, puisque l'équation du mouvement de chaque oscillateur est évidemment intégrable à cette limite.

Le point clé est que à la limite anti-continue, il n'y a pas propagation de l'énergie vibrationnelle et la dynamique du réseau consiste juste en des vibrations indépendantes localisées [59].

2.2.1 Principe de la limite anti-continue

Ce principe est basé sur la "continuation" (le prolongement) des solutions breathers qui existent trivialement à la limite anti-continue. Le principe de la limite anti-continue est le suivant :

1. On cherche une solution périodique dans le temps et localisée dans l'espace de l'équation (2.2). Cette solution est appelée "solution triviale", ou "breather trivial". Pour l'obtenir, on excite par exemple un oscillateur avec une fréquence f_b et une amplitude V_d de la tension excitatrice, pendant que les autres restent au repos.
2. On montre qu'il y a persistance (continuation) de la solution triviale à travers le schéma itératif de Newton-Raphson quand on rajoute le terme de couplage L , mais dans une limite de couplage faible (c'est-à-dire de petites valeurs de L). Lorsque $L \neq 0$, tous les oscillateurs oscillent à la même fréquence f_b , mais les amplitudes de leurs oscillations décroissent exponentiellement comme une fonction de la distance d_i de l'oscillateur i à l'oscillateur excité. La solution obtenue à la fin du processus de continuation est celle que nous cherchons ; c'est la solution de l'équation (2.1). Elle est appelée solution breather.

2.2. La limite anti-continue

2.2.2 Procédure de continuation à partir de la limite anti-continue

D'après J.L. Marin et S. Aubry [59], la procédure de continuation est la suivante :

Une fois que nous connaissons la solution triviale à la limite anti-continue ($L = 0$) que nous notons $v(L = 0)$ avec $v \equiv \{v_n\}_{1 \leq n \leq N}$, on fait varier le coefficient de couplage L par petits incréments δL . À la première incrémentation, on utilise la solution $v(L = 0)$ comme condition initiale et on résout les équations (2.1) en utilisant le schéma itératif de Newton-Raphson avec le coefficient de couplage $L + \delta L$. On poursuit l'incrémentaion jusqu'à la valeur de L désirée. Ceci marche tant que $L + k\delta L$ (où k est l'entier désignant la k^{ieme} incrémentation) reste assez petit, et que la matrice Jacobienne qui apparaît dans le processus itératif est inversible. À la k^{ieme} incrémentation, on résout le système d'équations (2.1) avec le coefficient de couplage $L + k\delta L$ en utilisant comme condition initiale la solution trouvée à la $(k - 1)^{ieme}$ incrémentation avec le coefficient de couplage $L + (k - 1)\delta L$.

2.2.3 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson encore appelée tout simplement méthode de Newton est une technique puissante pour résoudre numériquement les équations différentielles. Comme la plupart des calculs différentiels, elle est basée sur la simple idée d'approximation linéaire.

Considérons de manière générale l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction de classe C^∞ . Supposons que sa solution approchée d'ordre zéro soit x_0 . Pour améliorer cette solution, nous admettons que la solution d'ordre un est $x_1 = x_0 + h$, où h est un infiniment petit.

En utilisant la formule de Taylor dans la limite de l'approximation linéaire, on a :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \quad (2.3)$$

Or $f(x_0 + h) = 0$. Ceci entraîne que :

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.4)$$

2.2. La limite anti-continue

La solution à l'ordre un est donc :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.5)$$

Comme la solution d'ordre un n'est qu'une autre approximation, un processus itératif doit être lancé pour trouver la bonne solution de l'équation. À l'ordre $n + 1$, le processus itératif s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.6)$$

La solution de l'équation est obtenue lorsque à un ordre m donné on a :

$$|x_{m+1} - x_m| < \varepsilon \quad (2.7)$$

où ε est la précision choisie. Cette condition est appelée test de convergence.

Revenons à notre système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} = y_n - i_D(v_n) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_n \\ \frac{dy_n}{d\tau} = L(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) - v_n \end{cases} \quad (2.8)$$

Il s'écrit encore :

$$\begin{cases} c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} - y_n + i_D(v_n) - \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} + \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_n = 0 \\ \frac{dy_n}{d\tau} - L(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) + v_n = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Les solutions de ce système dynamique à savoir les breathers discrets sont déterminées en calculant ses points fixes entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = T$ où $T = \frac{1}{f}$ est la période temporelle du breather.

Pour cela, on utilise la méthode de Newton-Raphson décrite ci-dessus.

Posons :

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n) \quad (2.10)$$

$$G = (G_1, G_2, \dots, G_n) \quad (2.11)$$

2.2. La limite anti-continue

avec

$$F_n = c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} - y_n + i_D(v_n) - \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} + \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_n \quad (2.12)$$

$$G_n = \frac{dy_n}{d\tau} - L(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) + v_n \quad (2.13)$$

Le problème est de trouver $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pour tout instant τ entre 0 et T , et pour une valeur donnée de L , pour lesquelles $F(v) = 0$ et $G(y) = 0$.

En utilisant la méthode de Newton-Raphson, on aboutit aux processus itératifs :

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} - J^{-1}(v)F(v^{(k)}) \quad (2.14)$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - J^{-1}(y)G(y^{(k)}) \quad (2.15)$$

où $v^{(k)}$ et $y^{(k)}$ sont les valeurs respectives de v et y à la $k^{ième}$ itération, et $J(v)$ et $J(y)$ sont les matrices Jacobiennes associées aux systèmes $F(v) = 0$ et $G(y) = 0$ respectivement.

Les processus itératifs (2.14) et (2.15) convergent si $J(v)$ et $J(y)$ sont inversibles au cours des itérations et si l'approximation initiale choisie $(v^{(0)}, y^{(0)})$ est proche de la solution exacte.

2.2.4 Méthode numérique d'intégration des équations

La méthode numérique d'intégration que nous allons utiliser pour obtenir les solutions breathers (profils spatiaux, évolutions temporelles et spatio-temporelles) des équations (2.1) est la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre. Cette méthode d'intégration numérique est connue pour converger assez rapidement. Pour faciliter la résolution des équations, nous nous servons de l'intégrateur numérique ODE45 qui est programme incorporé dans le logiciel MATLAB (MATrix LABoratory), et qui est basé sur la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Dans nos calculs, nous allons utiliser à chaque itération, une précision relative de 10^{-14} et une précision absolue de 10^{-12} .

2.3 Étude de la stabilité linéaire des solutions breathers

Dans cette section, nous étudions la stabilité des solutions breathers à partir de l'analyse de Floquet. Pour cela, nous commençons par un bref rappel sur la théorie de Floquet.

2.3.1 Théorie de Floquet

Soit

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{X}(t), t) \quad (2.16)$$

un flot dans \mathbb{R}^n , où $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ désigne un vecteur de \mathbb{R}^n , $t \in \mathbb{R}$ désigne le temps, et \vec{F} est une fonction qui dépend de $\vec{X}(t)$ et de t . Lorsque \vec{F} ne dépend pas explicitement de t , mais seulement de $\vec{X}(t)$, le flot est dit *autonome*. Dans le cas contraire, on a affaire à un flot *non-autonome*.

Nous considérons une solution périodique du flot non-autonome, de période T .

On a alors $\vec{X}(t + T) = \vec{X}(t)$.

Pour savoir si cette solution est stable ou non, il suffit de regarder ce qu'il advient d'un petit écart initial $\delta\vec{X}$ par rapport au cycle limite représentatif de cette solution dans l'espace des phases de dimension n . La figure ci-dessous illustre le cycle limite et le petit écart $\delta\vec{X}$.

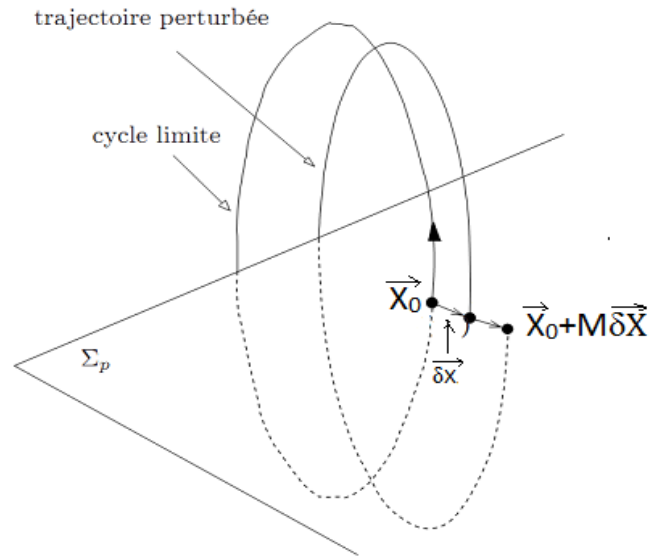


FIGURE 2.1 – Cycle limite et trajectoire perturbée

En linéarisant le flot autour de la trajectoire périodique, on trouve qu'une condition initiale $\vec{X}_0 + \delta\vec{X}$ est transformée au bout d'une période T en $\vec{X}_0 + M\delta\vec{X}$. M étant une matrice ($n \times n$) dite opérateur de Floquet ou matrice de monodromie. L'étude de la stabilité linéaire se ramène donc à l'étude des valeurs propres de M .

Par la suite, nous convenons de noter $\varphi(t, \vec{X}_0)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, les trajectoires solutions du système d'équations différentielles (2.16) munies de la condition initiale $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$.

2.3.2 La matrice de Monodromie

Le concept de l'approche par la matrice de Monodromie est d'étudier l'influence d'une perturbation des conditions initiales sur l'évolution temporelle des solutions du flot (2.16). À cette fin, on considère $\vec{X}^*(t)$ une solution périodique particulière du flot (2.16) : la stabilité de $\vec{X}^*(t)$ est évaluée par la détermination, après une période T , de l'écart entre la trajectoire de la solution périodique $\vec{X}^*(t)$ et la trajectoire issue d'une légère perturbation de la condition initiale.

Soient $\varphi(t, \vec{X}_0^*)$ la trajectoire de la solution périodique $\vec{X}^*(t)$ correspondant à la condition initiale $\vec{X}^*(0) = \vec{X}_0^*$ et $\varphi(t, \vec{X}_0^* + \delta\vec{X}_0)$ la trajectoire de la solution ayant pour condition initiale $\vec{X}_0^* + \delta\vec{X}_0$.

2.3. Étude de la stabilité linéaire des solutions breathers

L'évolution temporelle de l'écart entre les trajectoires est donnée par :

$$\delta \vec{X}(t) = \varphi(t, \vec{X}_0^* + \delta \vec{X}_0) - \varphi(t, \vec{X}_0^*) \quad (2.17)$$

Après une période on a :

$$\delta \vec{X}(T) = \varphi(T, \vec{X}_0^* + \delta \vec{X}_0) - \varphi(T, \vec{X}_0^*) \quad (2.18)$$

En effectuant un développement de Taylor autour de \vec{X}_0^* , on aboutit au premier ordre à :

$$\delta \vec{X}(T) = \frac{\partial \varphi(T, \vec{X}_0^*)}{\partial \vec{X}_0} \delta \vec{X}_0 \quad (2.19)$$

On constate que l'écart entre deux trajectoires à $t = T$ est lié à l'écart initial $\delta \vec{X}_0$ par la matrice :

$$\frac{\partial \varphi(T, \vec{X}_0^*)}{\partial \vec{X}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial X_0^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial X_0^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial X_0^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial X_0^n} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où φ^i et $X_0^i (i = 1, \dots, n)$ représentent respectivement la i^{eme} composante de φ et de \vec{X}_0 .

Le spectre de la matrice $\mathcal{M} = \frac{\partial \varphi(T, \vec{X}_0^*)}{\partial \vec{X}_0}$ appelée "*Matrice de Monodromie*" décidera de la stabilité du système (2.16) par l'intermédiaire de la croissance ou de l'amortissement de la perturbation initiale.

2.3.3 Propriétés de stabilité des solutions périodiques

Soit $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ le spectre des valeurs propres de la matrice de monodromie.

La matrice de monodromie a systématiquement la valeur propre $\lambda = 1$ [60].

On convient, quitte à les renuméroter, que λ_n correspond à la valeur propre $\lambda = 1$. La stabilité linéaire de la solution périodique $\vec{X}(t)$ du flot (2.16) est déterminée par les $n - 1$ autres valeurs propres en appliquant la règle suivante :

- Si pour tout $i = 1, \dots, n - 1$ on a $|\lambda_i| < 1$, alors la solution périodique est linéairement stable.

2.3. Étude de la stabilité linéaire des solutions breathers

– S'il existe i , $1 \leq i \leq n-1$ tel que $|\lambda_i| > 1$, alors la solution périodique est linéairement instable.

Notons que $|\lambda_i|$ signifie "module de λ_i ".

2.3.4 Évolution de la perturbation

Revenons maintenant à notre système d'équations dynamiques (2.1) que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{cases} c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} = y_n - i_D(v_n) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_n \\ \frac{dy_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1} (v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) - v_n \end{cases} \quad (2.21)$$

avec $n = 1, \dots, N$.

Ce système dynamique est un flot non linéaire et non-autonome dans \mathbb{R}^{2N} .

Dans le but d'étudier la stabilité linéaire des breathers discrets solutions de ce système d'équations différentielles couplées, nous introduisons une petite perturbation (ξ_n, η_n) à une solution périodique donnée (v_{n0}, y_{n0}) du système (2.21).

La solution (v_{n0}, y_{n0}) devient la solution perturbée (v_n, y_n) avec :

$$v_n = v_{n0} + \xi_n \quad \text{et} \quad y_n = y_{n0} + \eta_n \quad (2.22)$$

Pour déterminer l'évolution de la perturbation (ξ_n, η_n) , nous substituons les relations (2.22) dans (2.21). La première équation du système (2.21) devient :

$$c(v_{n0} + \xi_n) \left(\frac{dv_{n0}}{d\tau} + \frac{d\xi_n}{d\tau} \right) = y_n - i_D(v_{n0} + \xi_n) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) (v_{n0} + \xi_n) \quad (2.23)$$

Le développement limité au premier ordre en ξ_n de $c(v_{n0} + \xi_n)$ et $i_D(v_{n0} + \xi_n)$ autour de v_{n0} donne :

$$c(v_{n0} + \xi_n) = c(v_{n0}) + \xi_n \frac{dc(v_{n0})}{dv_{n0}} \quad (2.24)$$

$$i_D(v_{n0} + \xi_n) = i_D(v_{n0}) + \xi_n \frac{di_D(v_{n0})}{dv_{n0}} \quad (2.25)$$

2.3. Étude de la stabilité linéaire des solutions breathers

En substituant (2.24) et (2.25) dans (2.23) et en éliminant les termes non linéaires en ξ_n , on obtient :

$$c(v_{n0}) \frac{dv_{n0}}{d\tau} + c(v_{n0}) \frac{d\xi_n}{d\tau} + \xi_n \frac{dv_{n0}}{d\tau} \frac{dc(v_{n0})}{dv_{n0}} = y_{n0} + \eta_n - \left[i_D(v_{n0}) + \xi_n \frac{di_D(v_{n0})}{dv_{n0}} \right] + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) (v_{n0} + \xi_n) \quad (2.26)$$

En remplaçant n par $n0$ dans la première équation du système (2.21) on a :

$$c(v_{n0}) \frac{dv_{n0}}{d\tau} = y_{n0} - i_D(v_{n0}) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} \quad (2.27)$$

(2.27) entraîne que :

$$\frac{dv_{n0}}{d\tau} = \frac{1}{c(v_{n0})} \left[y_{n0} - i_D(v_{n0}) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} \right] \quad (2.28)$$

En substituant (2.27) et (2.28) respectivement dans les premier et troisième termes du membre de gauche de l'équation (2.26), cette équation devient :

$$\begin{aligned} & y_{n0} - i_D(v_{n0}) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} + c(v_{n0}) \frac{d\xi_n}{d\tau} + \\ & \frac{\xi_n}{c(v_{n0})} \frac{dc(v_{n0})}{dv_{n0}} \left[y_{n0} - i_D(v_{n0}) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} \right] = y_{n0} + \eta_n - i_D(v_{n0}) - \xi_n \frac{di_D(v_{n0})}{dv_{n0}} + \\ & + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) \xi_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) équivaut à :

$$\begin{aligned} & c(v_{n0}) \frac{d\xi_n}{d\tau} = \eta_n - \xi_n \frac{di_D(v_{n0})}{dv_{n0}} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) \xi_n - \\ & \left(\frac{1}{c(v_{n0})} \frac{dc(v_{n0})}{dv_{n0}} \right) \left[y_{n0} - i_D(v_{n0}) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} \right] \xi_n \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.3. Étude de la stabilité linéaire des solutions breathers

En remarquant que $\left(\frac{1}{c(v_{n0})} \frac{dc(v_{n0})}{dv_{n0}}\right) = \frac{d \ln[c(v_{n0})]}{dv_{n0}}$, l'équation (2.30) devient :

$$c(v_{n0}) \frac{d\xi_n}{d\tau} = \eta_n - \xi_n \left\{ \frac{di_D(v_{n0})}{dv_{n0}} + \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) - \frac{d \ln[c(v_{n0})]}{dv_{n0}} \times \left[y_{n0} - i_D(v_{n0}) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} \right] \right\} \quad (2.31)$$

L'équation (2.31) équivaut à :

$$c(v_{n0}) \frac{d\xi_n}{d\tau} = \eta_n - \Gamma(v_{n0}; t) \xi_n \quad (2.32)$$

avec :

$$\Gamma(v_{n0}; t) = \frac{di_D(v_{n0})}{dv_{n0}} + \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) - \frac{d \ln[c(v_{n0})]}{dv_{n0}} \left[y_{n0} - i_D(v_{n0}) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_{n0} \right] \quad (2.33)$$

En insérant la solution perturbée (2.22) dans la deuxième équation du système (2.21), cette équation devient :

$$\frac{dy_{n0}}{d\tau} + \frac{d\eta_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) - (v_{n0} + \xi_n) \quad (2.34)$$

L'équation (2.34) équivaut à :

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) - \xi_n - \left(v_{n0} + \frac{dy_{n0}}{d\tau} \right) \quad (2.35)$$

En remplaçant n par n_0 dans la deuxième équation du système (2.21) on a :

$$\frac{dy_{n0}}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1} (v_{n0+1} + v_{n0-1} - 2v_{n0}) - v_{n0} \quad (2.36)$$

En substituant (2.36) dans (2.35) on obtient :

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) - \xi_n - \frac{L_2}{L_1} (v_{n0+1} + v_{n0-1} - 2v_{n0}) \quad (2.37)$$

Puisque $v_n = v_{n0} + \xi_n$, on a $v_{n0+1} = v_{n0} + \xi_{n0+1}$ et $v_{n0-1} = v_{n0} + \xi_{n0-1}$.

Ceci entraîne que :

2.3. Étude de la stabilité linéaire des solutions breathers

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1}(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) - \xi_n - \frac{L_2}{L_1}(\xi_{n0+1} + \xi_{n0-1} - 2\xi_{n0}) \quad (2.38)$$

Or $\xi_{n0+1} = \xi_{n0-1} = \xi_{n0}$.

D'où

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1}(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) - \xi_n \quad (2.39)$$

L'évolution de la perturbation (ξ_n, η_n) est donc gouvernée par les équations (2.32) et (2.39) constituant le système d'équations différentielles linéaires couplées du premier ordre ci-dessous :

$$\begin{cases} c(v_{n0}) \frac{d\xi_n}{d\tau} = \eta_n - \Gamma(v_{n0}; t) \xi_n \\ \frac{d\eta_n}{d\tau} = \frac{L_2}{L_1}(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) - \xi_n \end{cases} \quad (2.40)$$

avec $n = 1, \dots, N$.

La croissance ou l'amortissement de la perturbation est déterminé(e) par le spectre de la matrice de monodromie.

2.3.5 Calcul de la matrice de monodromie et de son spectre

Soit la matrice colonne $\left[\xi_n(0), \frac{d\xi_n}{d\tau}(0), \eta_n(0), \frac{d\eta_n}{d\tau}(0) \right]^\dagger$ représentant les conditions initiales de la perturbation (ξ_n, η_n) , et $\left[\xi_n(T), \frac{d\xi_n}{d\tau}(T), \eta_n(T), \frac{d\eta_n}{d\tau}(T) \right]^\dagger$ représentant la perturbation à l'instant $\tau = T$ où $T = \frac{1}{f}$ est la période temporelle du breather.

Notons que le symbole \dagger représente la transposée.

La matrice de monodromie \mathcal{M} (opérateur de Floquet) est définie par [24] :

$$\left[\xi_n(T), \frac{d\xi_n}{d\tau}(T), \eta_n(T), \frac{d\eta_n}{d\tau}(T) \right]^\dagger = \mathcal{M} \left[\xi_n(0), \frac{d\xi_n}{d\tau}(0), \eta_n(0), \frac{d\eta_n}{d\tau}(0) \right]^\dagger \quad (2.41)$$

Ainsi la matrice $\mathcal{M}(4N \times 4N)$ relie les perturbations à $\tau = T$ aux perturbations à $\tau = 0$. En d'autres termes, \mathcal{M} est la matrice associée au système linéaire (2.40).

2.4. Conclusion

La matrice \mathcal{M} est obtenue par intégration numérique des équations (2.40) de $\tau = 0$ à $\tau = T$, avec les $4N$ conditions initiales $\left[\xi_n(0), \frac{d\xi_n}{d\tau}(0), \eta_n(0), \frac{d\eta_n}{d\tau}(0) \right]^\dagger$ ($n = 1, \dots, N$).

Les valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=1}^{4N}$ de la matrice de monodromie (qui constituent son spectre), appelées *multiplicateurs de Floquet* sont calculées numériquement en déterminant les zéros du polynôme caractéristique de \mathcal{M} défini par :

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{M} - \lambda I) \quad (2.42)$$

où *det* signifie déterminant, et I est la matrice identité $4N \times 4N$.

2.3.6 Propriétés de stabilité des solutions breathers

Les propriétés de stabilité des solutions breathers sont données par le spectre de la matrice de monodromie. Soit $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq 4N}$ le spectre de la matrice de monodromie.

- S'il existe $i \in \{1, \dots, 4N\}$ tel que $|\lambda_i| > 1$, alors la solution breather est instable [24]. Dans ce cas les perturbations s'accroissent dans les directions des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i [61].
- Si $|\lambda_i| \leq 1 \forall i \in \{1, \dots, 4N\}$, la solution breather est stable [24]. Dans ce cas, les perturbations s'amortissent dans les directions des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i [61].

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la notion de limite anti-continue, et montrer comment, à partir des solutions triviales qui existent à cette limite, il est possible de construire les solutions breathers par continuation numérique des solutions triviales via la méthode de Newton-Raphson, dans la limite de faibles couplages. Nous avons ensuite montré comment déterminer la stabilité des solutions breathers au moyen du calcul de la matrice de monodromie et des multiplicateurs de Floquet. Nous avons également présenté les méthodes numériques qui nous permettront de conduire

2.4. Conclusion

les simulations numériques des équations dynamiques et dont nous présenterons les résultats au chapitre suivant.

RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des simulations numériques des équations établies aux chapitres 1 et 2. Il s'agit notamment des profils spatiaux et spatio-temporels des breathers et multibreathers solutions des équations de la ligne bi-inductance non linéaire discrète. Nous étudions la sensibilité aux conditions initiales de ces solutions, et nous montrons comment le mécanisme d'instabilité modulationnelle peut conduire à la formation des breathers discrets. Nous achevons ce chapitre en montrant comment la non-linéarité est à l'origine du phénomène de localisation.

3.2 Solution breather à la limite anti-continue : breather trivial à un pic centré sur un site

Nous avons vu au chapitre précédent, qu'à la limite anti-continue, chaque oscillateur non linéaire est gouverné par le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} c(v_n) \frac{dv_n}{d\tau} = y_n - i_D(v_n) + \frac{\cos(\Omega\tau)}{RC_0\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} \right) v_n \\ \frac{dy_n}{d\tau} = -v_n \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2. Solution breather à la limite anti-continue : breather trivial à un pic centré sur un site

Nous excitons la cellule de rang $n = 16$ avec la tension sinusoïdale d'amplitude $V_d = 4V$ et de fréquence $f = 243,6KHz$. La simulation numérique des équations (3.1) avec les paramètres suivants :

$$R = 10K\Omega, R_l = 5000\Omega, L_1 = 680\mu H, L_2 = 330\mu H, C_0 = 788pF, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_0}}, f = 243,6KHz, V_d = 4V, \Omega = \frac{2\pi f}{\omega_0}, L = 0.$$

nous a permis d'obtenir les figures ci-dessous :

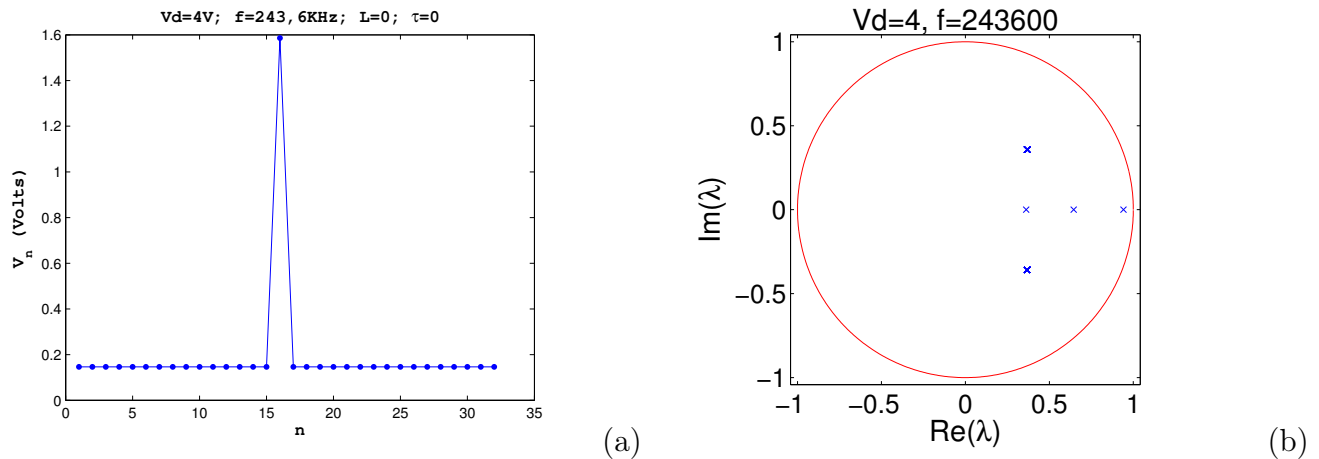


FIGURE 3.1 – Profil spatial initial du breather à 1 pic centré sur le site $n=16$ à la limite anti-continue (à gauche) et spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant (à droite) pour $V_d=4$ V et $f=243,6$ KHz

La figure 3.1 (a) montre le profil spatial initial du breather à la limite anti-continue. Nous voyons que le pic du breather est centré sur le site $n = 16$, correspondant au site qui a été excité. En ce site l'amplitude maximale du breather vaut 1,586 Volts. Nous constatons que l'excitation ne s'étend à aucun voisin de gauche comme de droite du site $n = 16$. Ceci s'explique par le fait que, à la limite anti-continue il n'y a pas de transfert d'énergie. La tension correspondant aux sites $n = 1$ à $n = 15$ et aux sites $n = 17$ à $n = 32$ est de 0,1462 Volt.

La figure 3.1 (b) montre le spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant au breather trivial de la figure 3.1 (a). Cette figure nous montre clairement que tous les multiplicateurs de Floquet sont à l'intérieur du cercle unité. Par conséquent le breather trivial est stable. Ce résultat est en parfait accord avec ce qu'ont prouvé MacKay et Aubry dans [55] à savoir : " la solution single-breather est

3.2. Solution breather à la limite anti-continue : breather trivial à un pic centré sur un site

linéairement stable assez proche de la limite anti-continue, pourvu que la condition de non-résonance $nf_b \neq 2f_0, \forall n \in \mathbb{N}$ soit satisfaite".

Les figures 3.2 montrent les profils du breather trivial aux instants $\tau = 4,0251\mu s$ et $\tau = 7,8615\mu s$. À l'instant $\tau = 4,0251\mu s$ le pic du breather atteint son minimum ($V=-0,589$ Volt) pour la première fois, et à l'instant $\tau = 7,8615\mu s$ il atteint son maximum ($V=1,645$ Volt) pour la première fois. La figure 3.3 nous montre que le breather est entrain d'osciller comme nous pouvons le voir sur la figure 3.4.

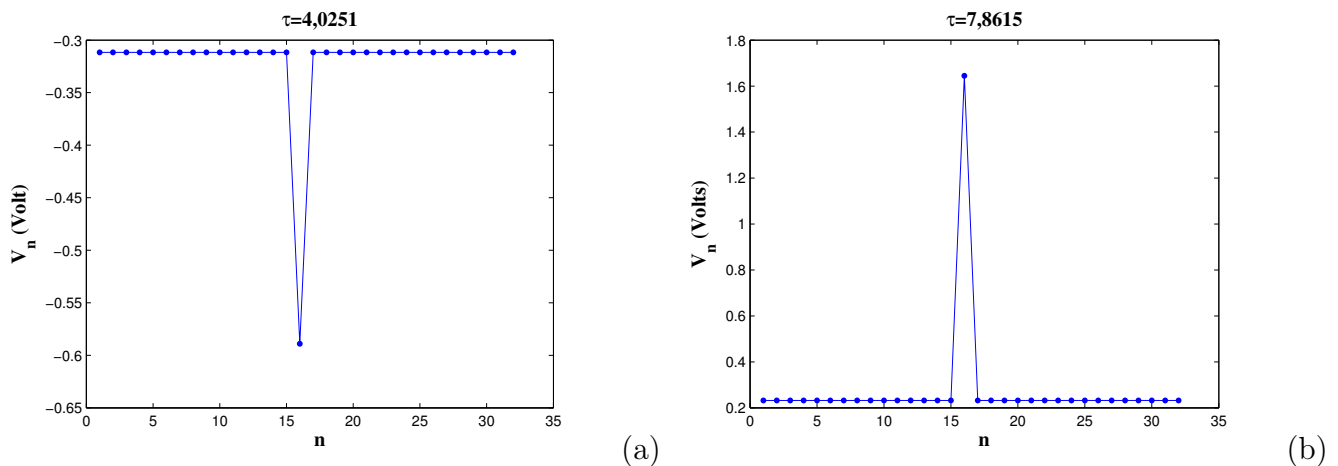


FIGURE 3.2 – Profils du breather trivial à l'instant $\tau = 4,0251\mu s$ et à l'instant $\tau = 7,8615\mu s$

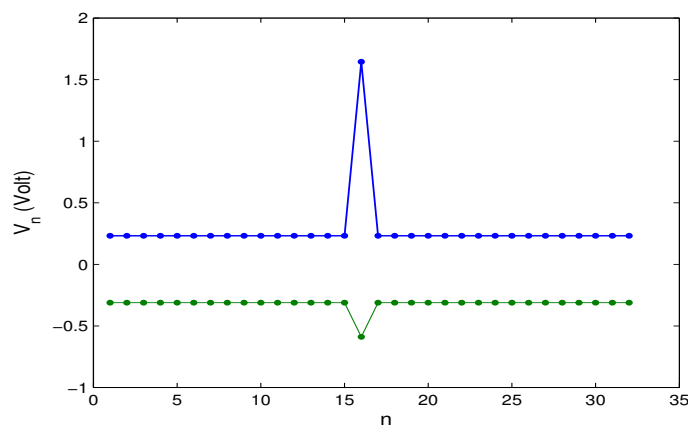


FIGURE 3.3 – Superposition des profils du breather trivial aux instants $\tau = 4,0251\mu s$ (courbe en vert) et $\tau = 7,8615\mu s$ (courbe en bleu) pour $V_d=4$ V et $f=243,6$ KHz

3.2. Solution breather à la limite anti-continue : breather trivial à un pic centré sur un site

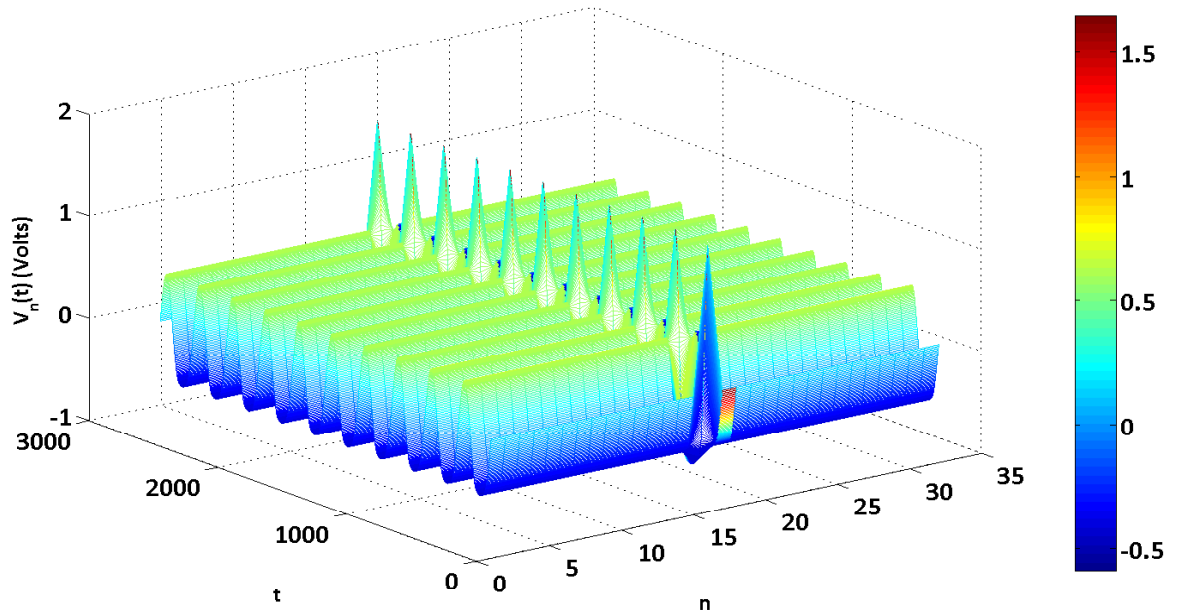


FIGURE 3.4 – Profil spatio-temporel du breather à la limite anti-continue pour $V_d=4$ V et $f=243,6$ KHz

Nous observons sur cette figure 3.4 que le pic du breather reste centré sur le site $n=16$, et prend ses valeurs maximale et minimale à des intervalles de temps réguliers de durée $T = 4,1\mu s$. Ceci prouve que la solution breather est une solution localisée dans l'espace et périodique dans le temps.

La figure 3.5 montre la vue de dessus du profil spatio-temporel du breather trivial présenté sur la figure 3.4. Au site $n = 16$, nous voyons comment le pic du breather prend alternativement ses valeurs maximale et minimale au cours du temps.

La figure 3.6 montre le profil du breather trivial aux instants où il atteint ses plus grandes valeurs positives (courbe en bleu) et ses plus petites valeurs négatives (courbe en vert) de la tension au cours de ses oscillations.

3.2. Solution breather à la limite anti-continue : breather trivial à un pic centré sur un site

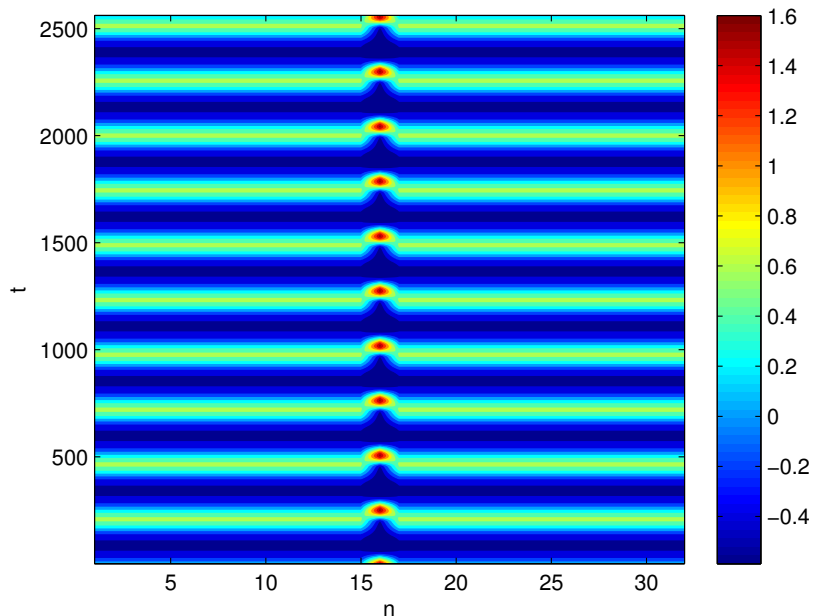


FIGURE 3.5 – *Vue de dessus du profil spatio-temporel du breather à la limite anti-continue*

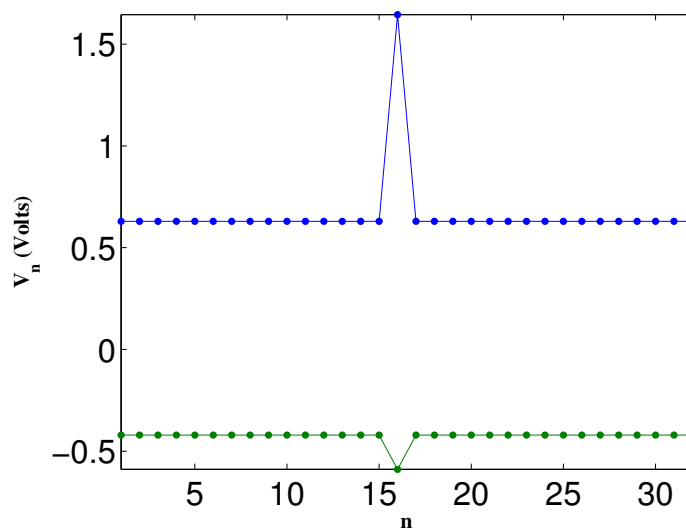


FIGURE 3.6 – *Profil spatial du breather aux instants où il atteint ses plus grandes valeurs positives et plus petites valeurs négatives de la tension*

3.3 Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)

En utilisant la solution breather trivial de la section précédente comme condition initiale de l'équation (2.8), et en faisant varier adiabatiquement le coefficient de couplage L de 0 jusqu'à 1, les simulations numériques des équations (2.8) et (2.40) pour la valeur du paramètre $L = 1$ nous a permis d'obtenir les figures 3.7 à 3.16.

La figure 3.7(a) présente le profil spatial initial du breather exact pour $V_d = 4V$ et $f = 243,6KHz$. Nous voyons sur cette figure que l'excitation est localisée dans l'espace, autour du site $n = 16$. Elle s'étend sur environ les cinq premiers sites voisins de gauche et de droite du site $n = 16$. Ceci montre qu'il y a effectivement couplage entre les oscillateurs. À partir du 6^{ieme} site de part et d'autre du site central $n = 16$, le signal est presque complètement atténué. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du site central $n = 16$ dans chaque direction, l'amplitude du signal décroît de manière exponentielle comme une fonction croissante de la distance d_i du site i au site central $n = 16$.

La figure 3.7(b) montre le spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant au breather de la figure 3.7(a). Sur cette figure nous voyons que les multiplicateurs de Floquet ne sont pas tous à l'intérieur du cercle unité. Il y en a un qui est à l'extérieur du cercle. Par conséquent le breather correspondant est linéairement instable.

3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)

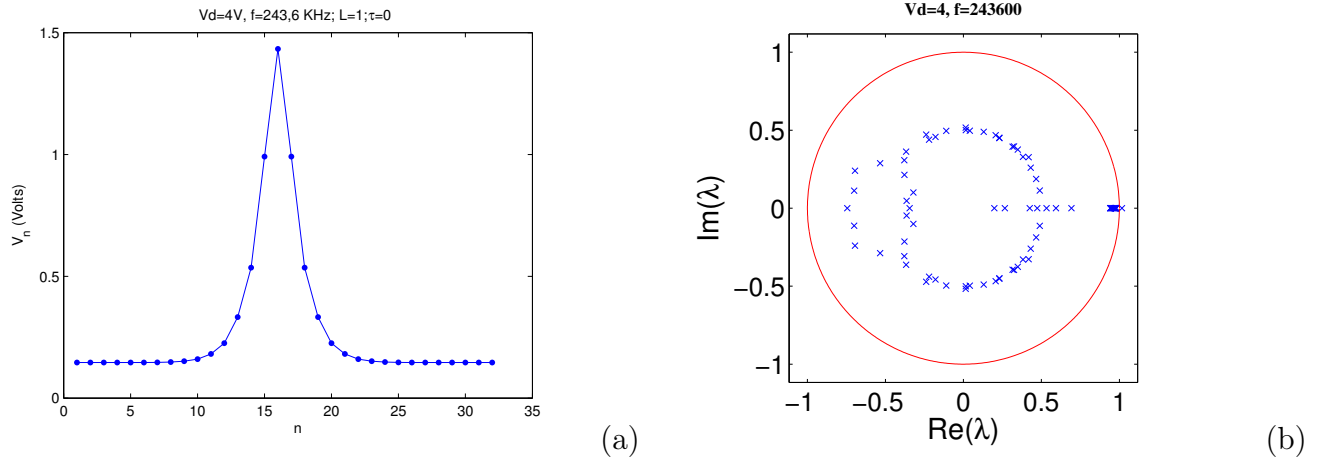


FIGURE 3.7 – Profil spatial initial du breather exact pour $V_d=4$ V et $f=243,6$ KHz et spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant

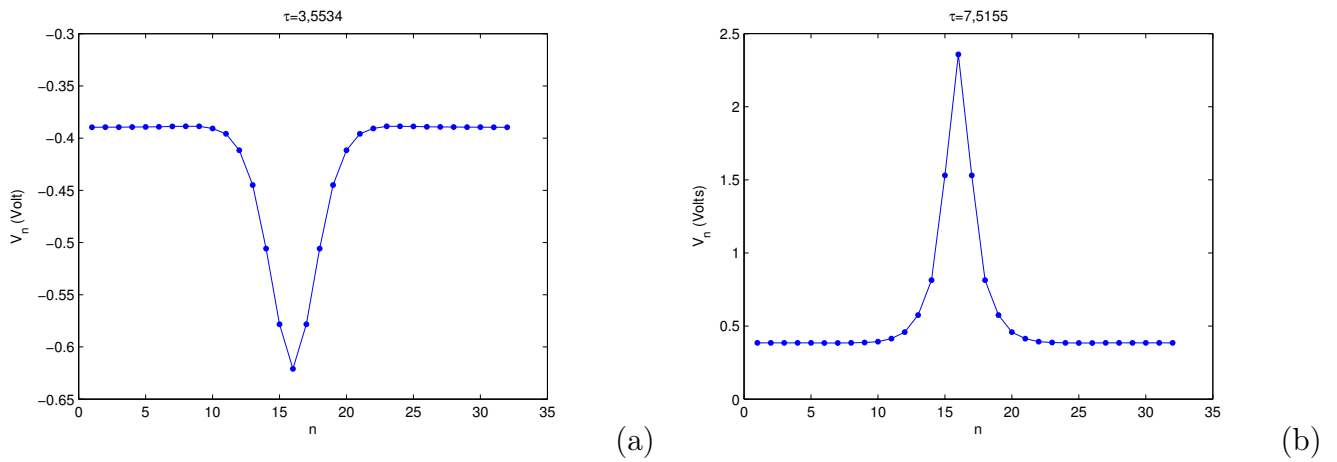


FIGURE 3.8 – Profil spatial du breather exact aux instants $\tau = 3,5534\mu s$ et $\tau = 7,5155\mu s$ pour $V_d=4$ V et $f=243,6$ KHz

3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)

Les figures 3.8 montrent les profils du breather aux instants $\tau = 3,5534\mu s$ et $\tau = 7,5155\mu s$. À l'instant $\tau = 3,5534\mu s$ le pic du breather atteint sa valeur minimale ($V=-0,621$ Volt) pour la première fois et à l'instant $\tau = 7,5155\mu s$, il atteint sa valeur maximale ($V=2,359$ Volts) pour la première fois. Dans les deux cas, le breather reste centré sur le site $n = 16$, et étendu aux 5 premiers voisins de part et d'autre du site central.

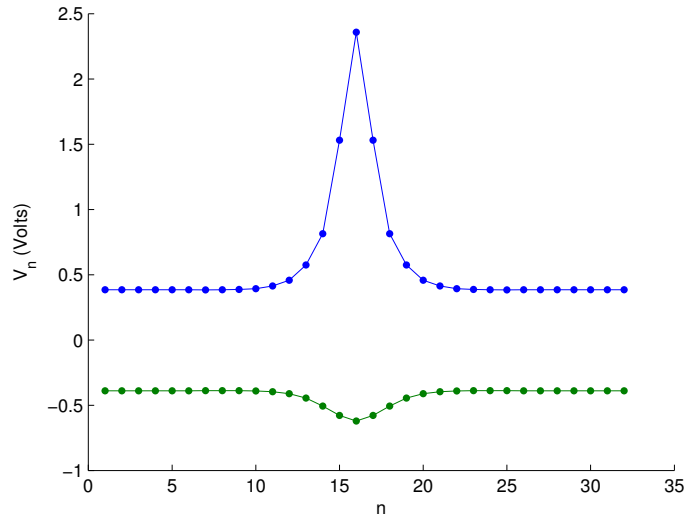


FIGURE 3.9 – *Superposition des profils du breather exact aux instants $\tau = 3,5534\mu s$ et $\tau = 7,5155\mu s$*

La figure 3.10 montre les oscillations du breather entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = 7,5155\mu s$. Sur cette figure, nous voyons comment à partir de l'instant initial $\tau = 0$, le pic du breather descend progressivement à partir de la valeur $V=1,433$ Volts jusqu'à la valeur $V=-0,621$ Volt où il prend sa valeur minimale, et ensuite remonte jusqu'à la valeur $V=2,359$ Volts où il prend sa valeur maximale. Au cours de ces oscillations, le pic du breather reste centré sur le site $n = 16$. Ceci montre que le breather ne se propage pas dans le réseau : il effectue des oscillations stationnaires. C'est la raison pour laquelle l'appellation "*oscillations localisées*" est aussi attribuée aux breathers.

3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)

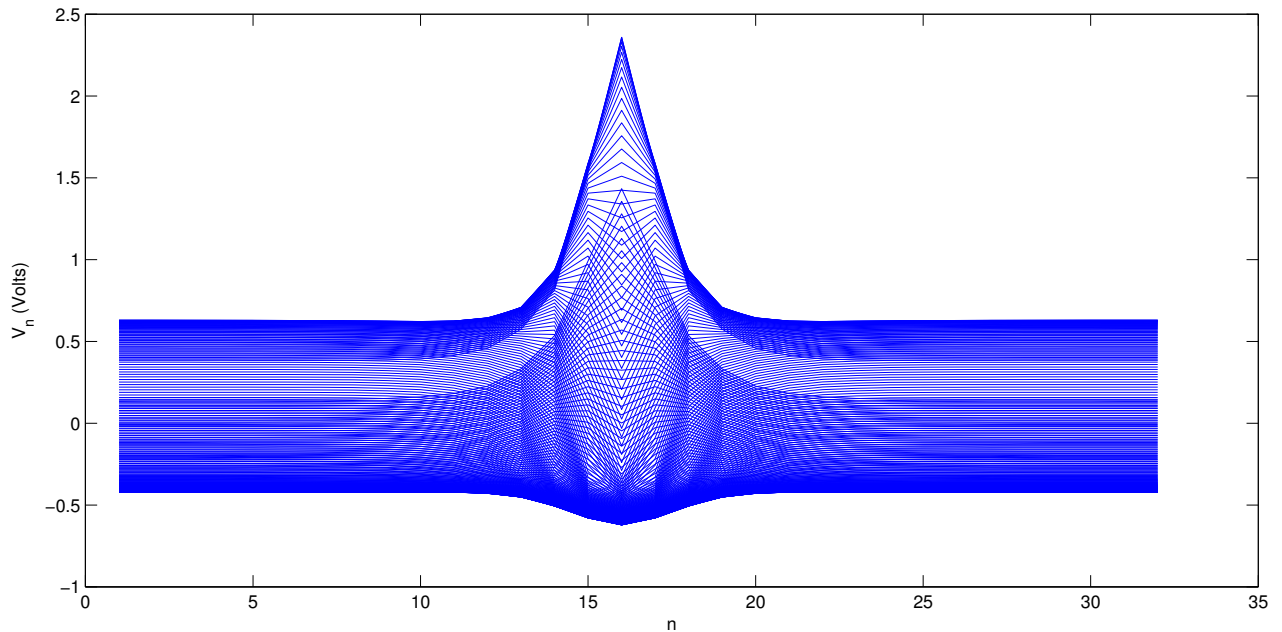


FIGURE 3.10 – Oscillations du breather entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = 7,5155\mu s$

La figure 3.11 présente le profil spatio-temporel du breather exact. Nous voyons clairement que l'énergie est localisée au 16^{ième} site ; en ce site, l'énergie est localisée périodiquement dans le temps.

La figure 3.12 présente la vue de dessus du profil spatio-temporel du breather exact. Sur cette figure, au niveau du 16^{ième} site, nous voyons le minimum (couleur bleu foncé) et le maximum (couleur marron) de la tension correspondant au pic du breather s'alterner périodiquement dans le temps.

Les figures 3.13 à 3.16 montrent l'évolution temporelle de la tension dans les 32 cellules de la ligne électrique à la suite de l'excitation de la 16^{ième} cellule. Nous remarquons tout d'abord que toutes les solutions ($V_i(t), 1 \leq i \leq 32$) sont T -périodiques avec $T = 4,1\mu s$. La tension atteint ses maximums au même instant dans toutes les cellules, de même que ses minimums. Ceci montre que toutes les cellules (oscillateurs) oscillent en phase avec la même fréquence. Nous remarquons que l'amplitude des oscillations est maximale dans la cellule 16. Cela était tout à fait prévisible, puisque c'est la cellule qui a été excitée. Cette amplitude décroît de manière considérable dans les cellules 15 à 12 et dans les cellules 17 à 20. Dans les cellules 1 à 11 et 21 à 32, l'amplitude est pratiquement constante.

3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)

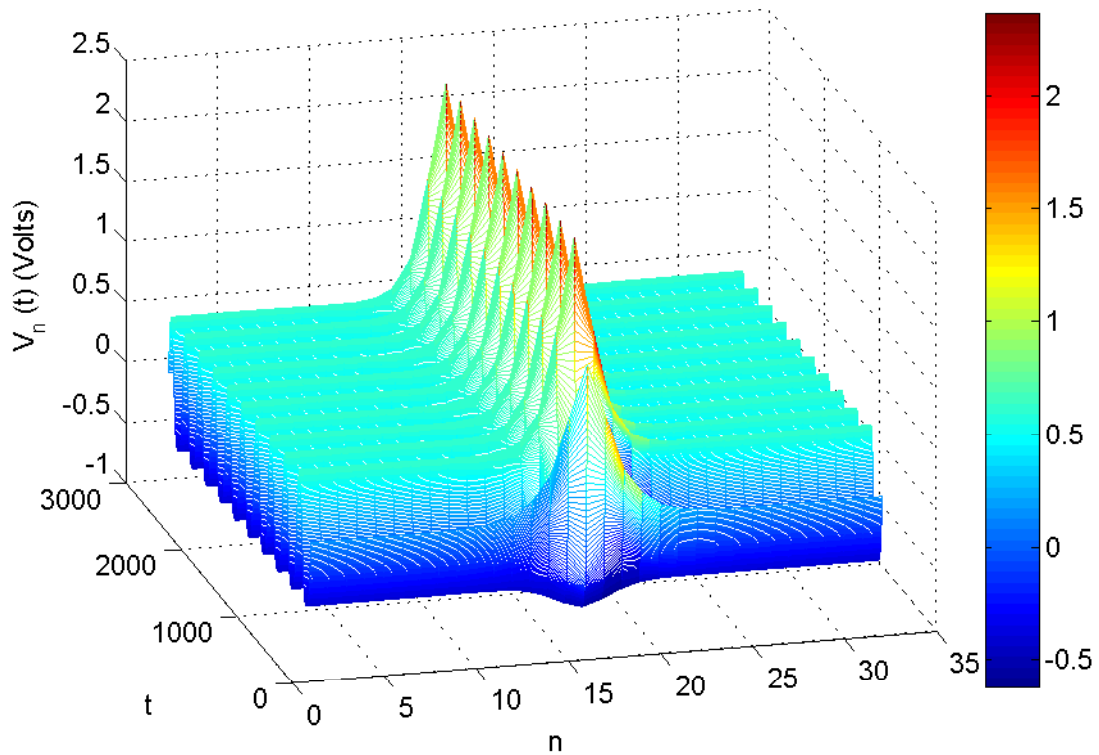


FIGURE 3.11 – Profil spatio-temporel du breather exact

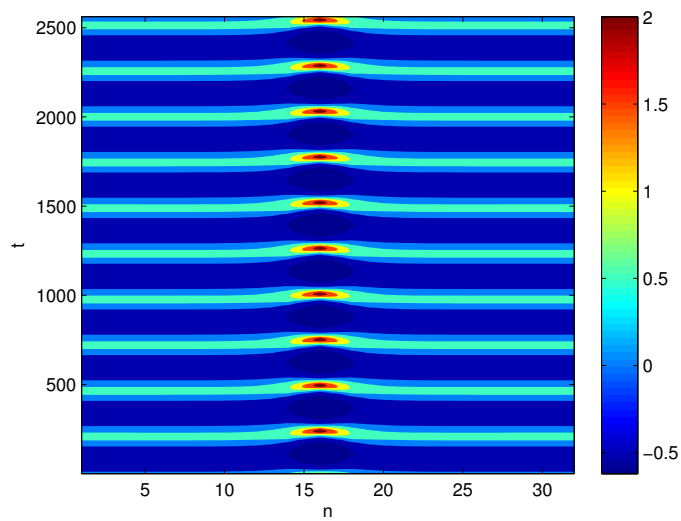
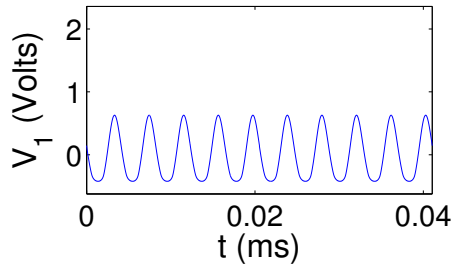
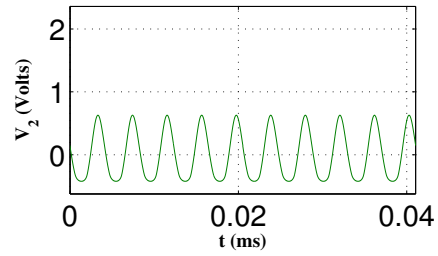


FIGURE 3.12 – Vue de dessus du profil spatio-temporel du breather exact

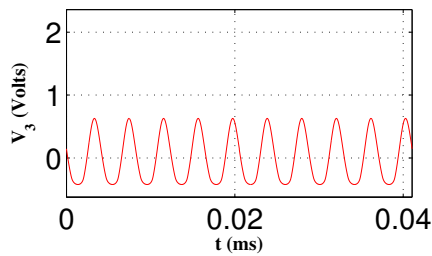
3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)



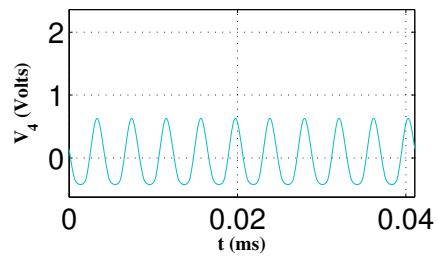
(a)



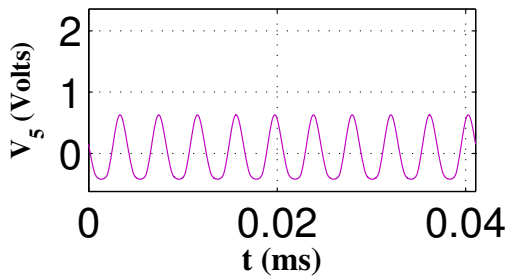
(b)



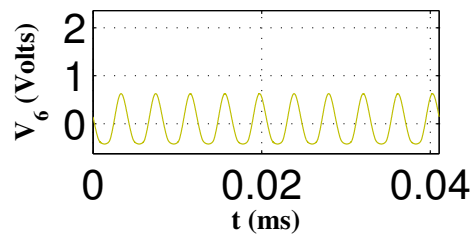
(c)



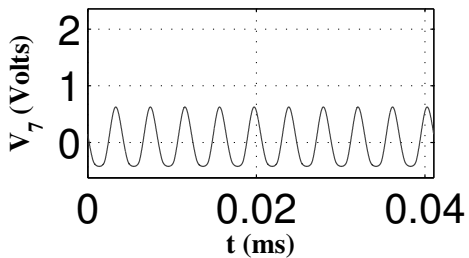
(d)



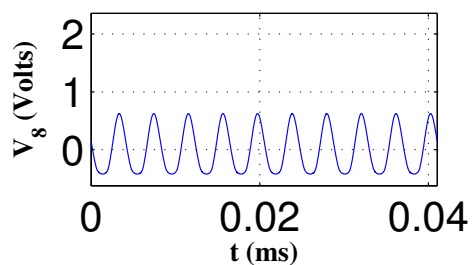
(e)



(f)



(g)



(h)

FIGURE 3.13 – Évolution de la tension dans les cellules 1 à 8

3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)

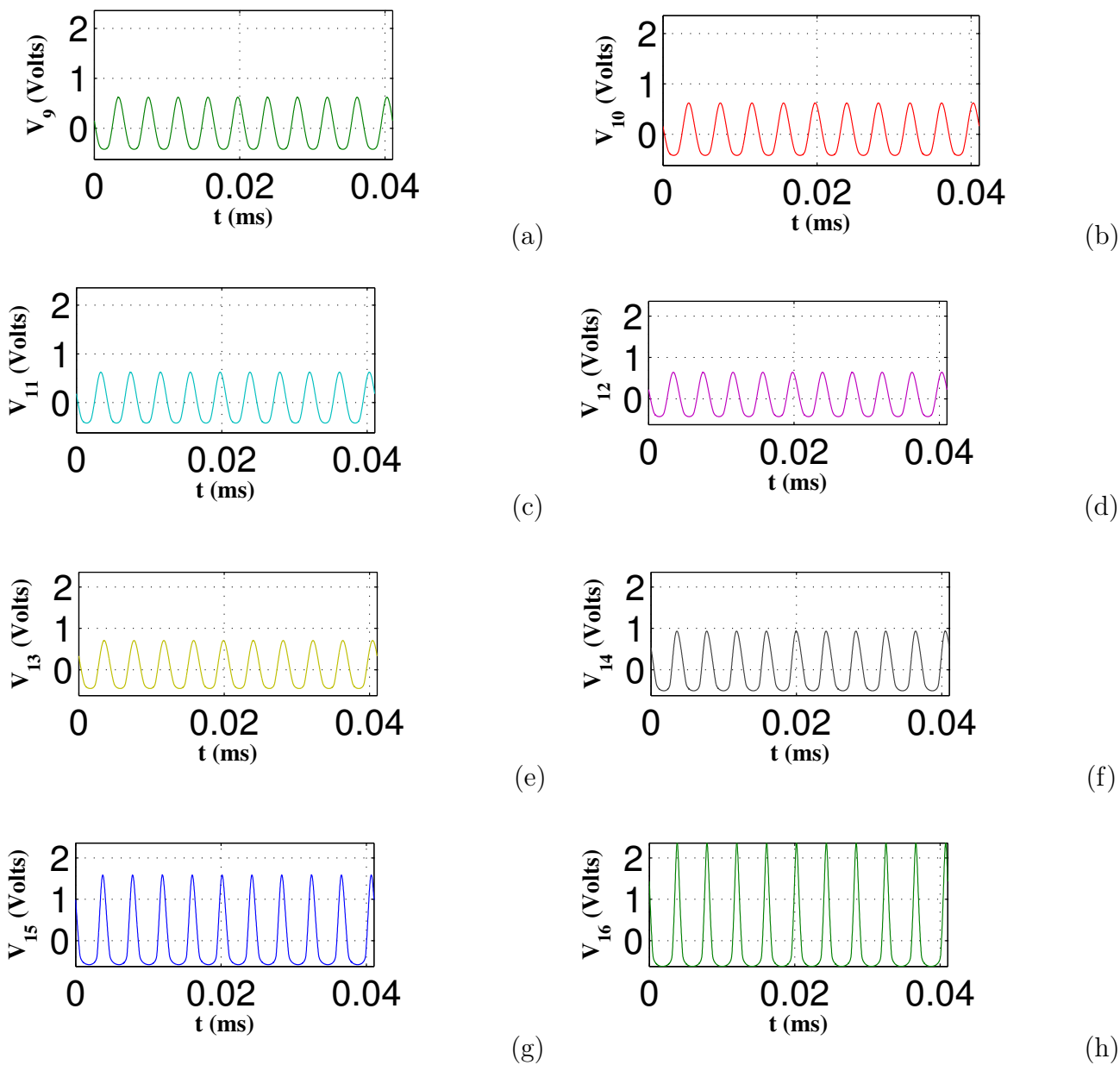
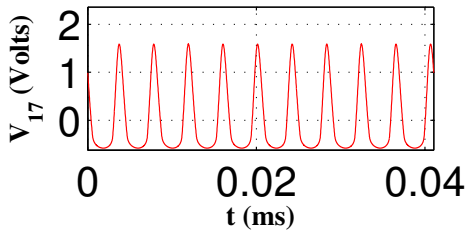
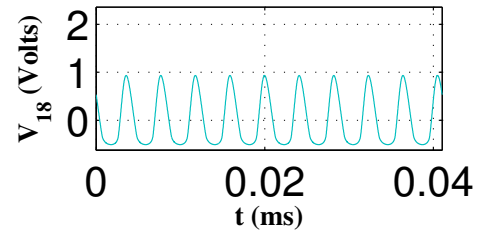


FIGURE 3.14 – Évolution de la tension dans les cellules 9 à 16

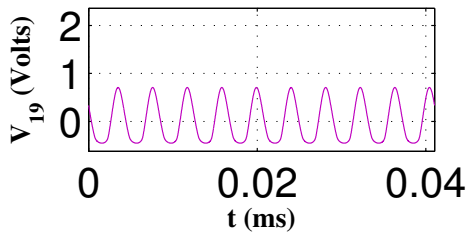
3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)



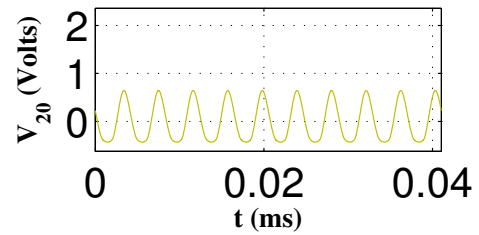
(a)



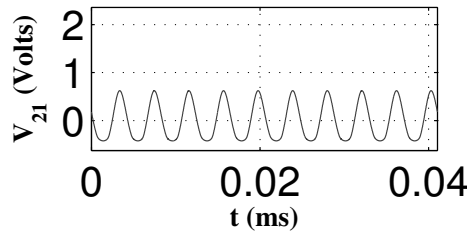
(b)



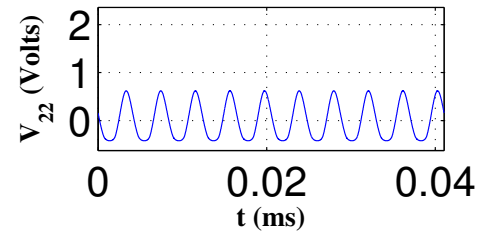
(c)



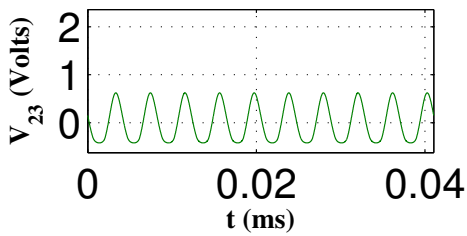
(d)



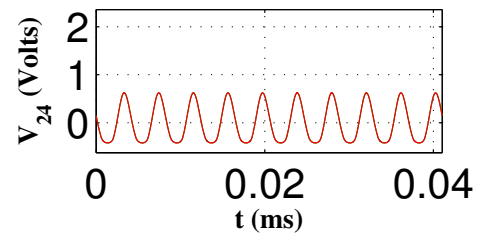
(e)



(f)



(g)



(h)

FIGURE 3.15 – Évolution de la tension dans les cellules 17 à 24

3.3. Continuation de la solution breather obtenue à la limite anti-continue : breather exact à un pic centré sur un site (onsite breather)

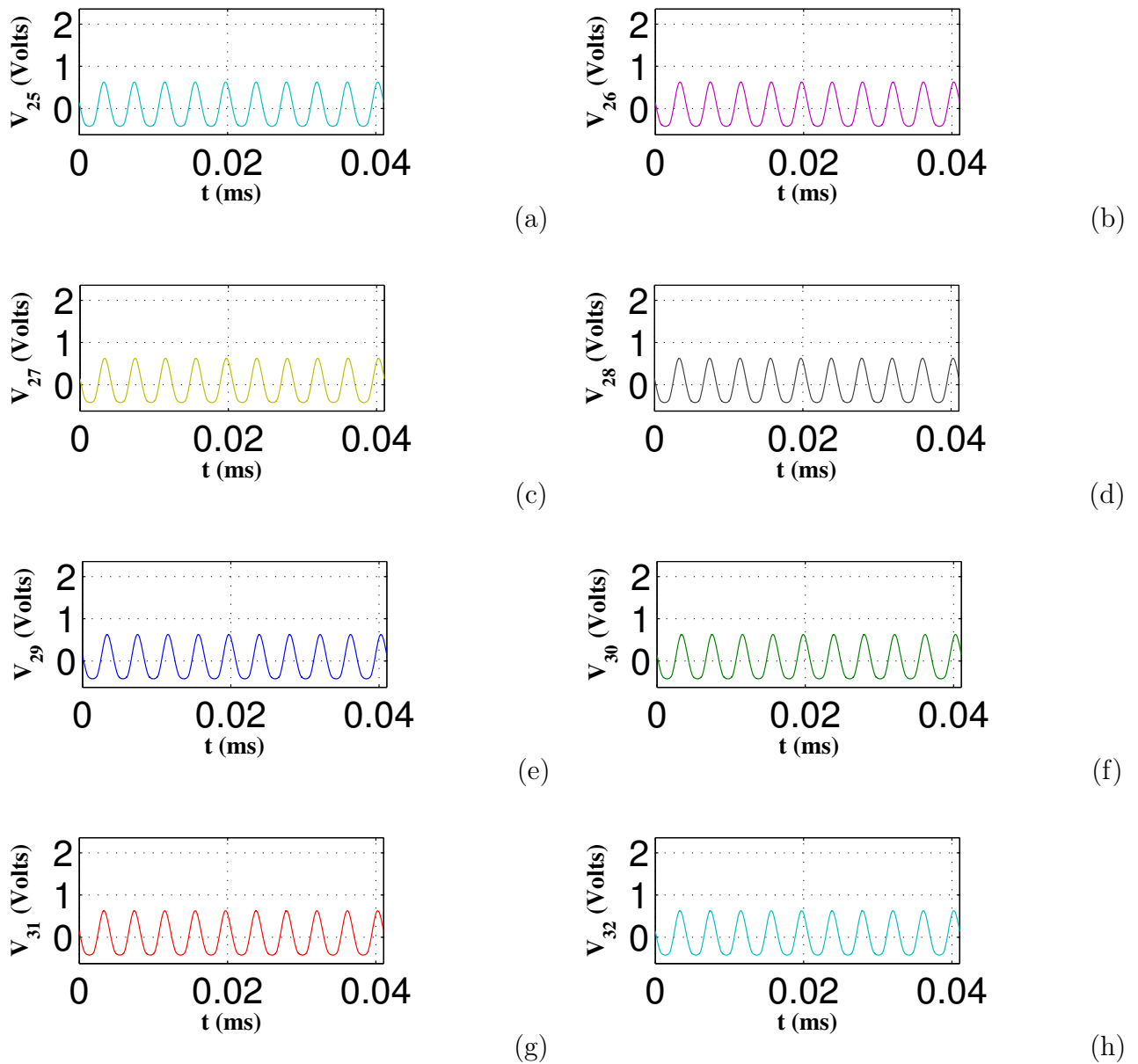


FIGURE 3.16 – Évolution de la tension dans les cellules 25 à 32

3.4. Breather à un pic centré sur deux sites (inter-site breather)

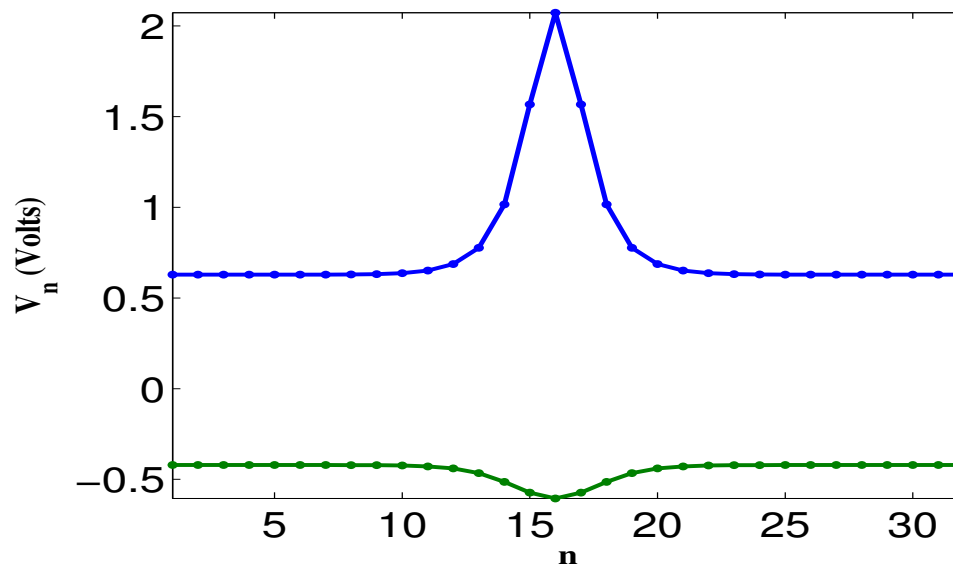


FIGURE 3.17 – Enveloppe des oscillations de la tension

La figure 3.17 présente l’enveloppe des oscillations de la tensions dans les 32 cellules de ligne. La courbe en bleu représente l’enveloppe supérieure et la courbe en vert représente l’enveloppe inférieure. Ces deux courbes correspondent aux profils du breather aux instants où la tension atteint ses maximums (pour l’enveloppe supérieure) et aux instants où la tension atteint ses minimums (pour l’enveloppe inférieure) dans les 32 cellules. Nous voyons donc bien effectivement pourquoi l’on dit que les breathers sont des solitons de type enveloppe.

3.4 Breather à un pic centré sur deux sites (inter-site breather)

Pour obtenir un breather à un pic centré sur deux sites, nous excitons les cellules de rangs $n = 16$ et $n = 17$ avec la même amplitude $V_d=4V$ et la même fréquence $f = 243,6KHz$ de la tension excitatrice. Les simulations numériques des équations (2.8) et (2.40) avec les paramètres ci-dessous :

$$R = 10K\Omega, R_l = 5000\Omega, L_1 = 680\mu H, L_2 = 330\mu H, C_0 = 788pF, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_0}}, f = 243,6KHz,$$

$$V_d = 4V, \Omega = \frac{2\pi f}{\omega_0}, L = 1,$$

nous ont permis d’obtenir les figures 3.18 à 3.20.

3.4. Breather à un pic centré sur deux sites (inter-site breather)

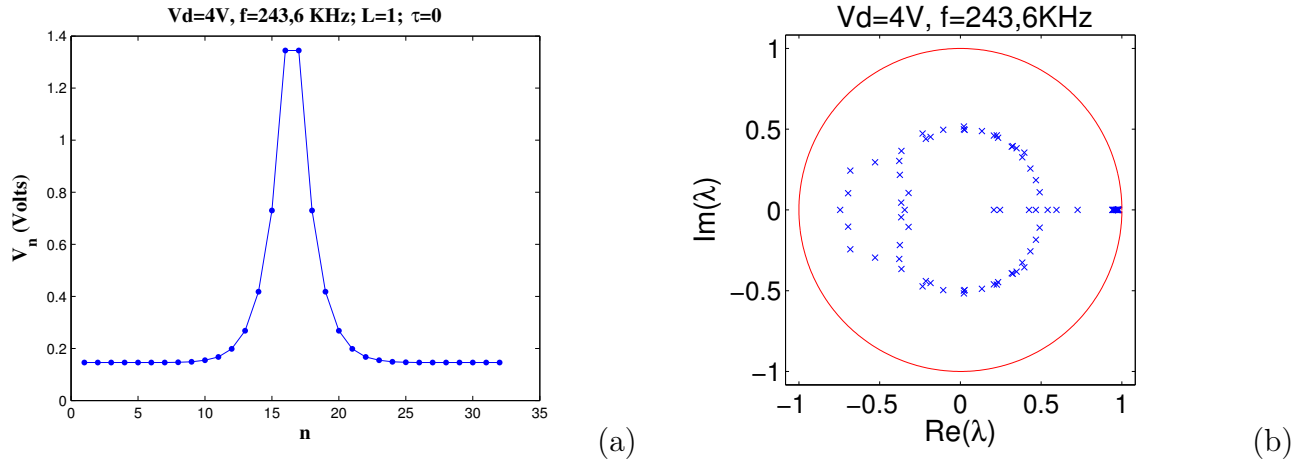


FIGURE 3.18 – Profil spatial initial du breather à un pic centré sur deux sites pour $V_d=4V$ et $f=243,6KHz$ et spectre des multiplicateurs de Floquet correspondant

La figure 3.18(a) montre le profil spatial initial du breather à un pic centré sur deux sites. Nous voyons que l'excitation est localisée dans l'espace autour des sites $n = 16$ et $n = 17$. Tout comme le breather à un pic centré sur un site, l'excitation s'étend sur les cinq premiers voisins de droite du site $n = 17$ et sur les cinq premiers voisins de gauche du site $n = 16$. À partir du 6^{ième} site à droite du site $n = 17$ et à gauche du site $n = 16$, le signal est complètement atténué.

Contrairement au breather à un pic centré sur un site qui est instable, la figure 3.18(b) montre que le breather à un pic centré sur deux sites est stable, puisque tous les multiplicateurs de Floquet sont à l'intérieur du cercle unité. Nous voyons donc qu'une infime variation des conditions initiales peut avoir des conséquences sur la stabilité d'une solution.

Concernant les figures 3.19 et 3.20, les commentaires qui ont été faits pour les figures analogues dans le cas du breather à un pic centré sur un site se transposent à celles-ci.

3.4. Breather à un pic centré sur deux sites (inter-site breather)

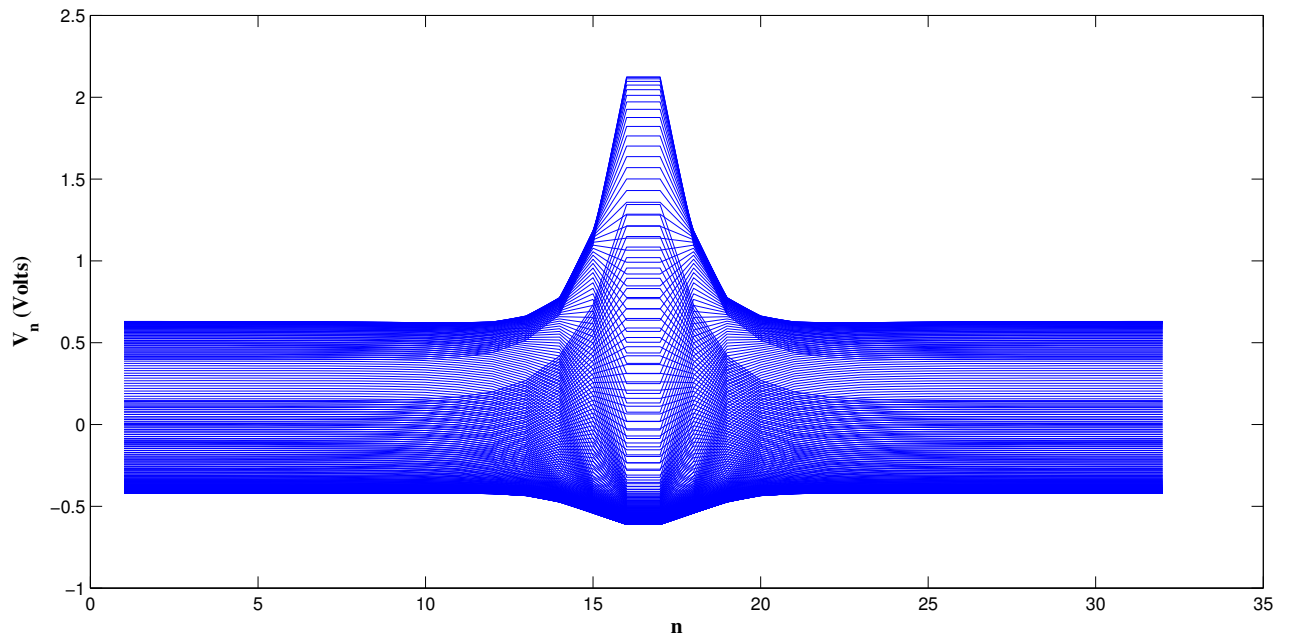


FIGURE 3.19 – Oscillations du breather à 1 pic centré sur 2 sites entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = 7,4841\mu s$

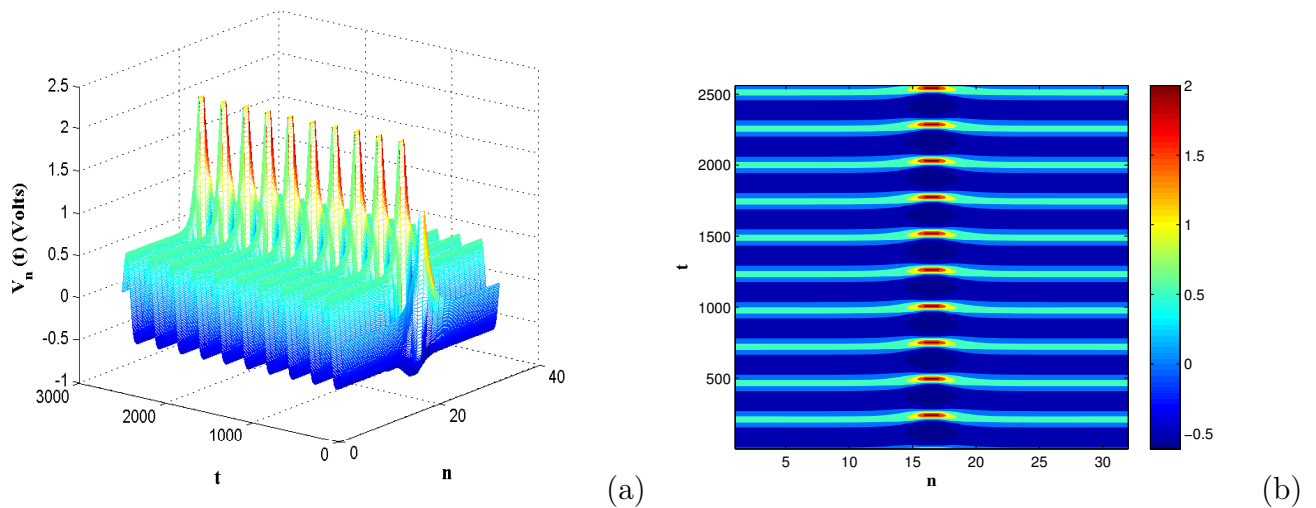


FIGURE 3.20 – Profil spatio-temporel du breather à un pic centré sur deux sites et vue de dessus correspondant

3.5 Solutions multibreathers

Les solutions multibreathers sont des solutions breathers comportant plus d'un pic. Les figures 3.21 montrent les profils de quelques solutions multibreathers que nous avons obtenu. Ces profils ont été pris aux instants où les pics atteignent leurs amplitude maximale et minimale de la tension. Nous sommes partis d'une solution breather que nous avons obtenu en excitant la cellule de rang $n = 6$, pour $V_d=2V$ et $f = 268KHz$. Le profil de la solution breather est représenté sur la figure 3.21(a1). La figure 3.21(b1) montre que la solution est stable. En maintenant l'amplitude V_d constante, nous avons augmenté progressivement la fréquence.

- Pour $f = 273KHz$, on obtient une solution multibreather stable à 2 pics. Le premier pic apparaît au site $n = 6$ et le deuxième apparaît au site $n = 22$.
- Pour $f = 276KHz$, on obtient une solution multibreather stable à 3 pics. Le premier pic apparaît au site $n = 6$, le deuxième au site $n = 18$ et le troisième au site $n = 26$.
- Pour $f = 283KHz$, on obtient une solution multibreather stable à 4 pics. Le premier pic apparaît au site $n = 6$, le deuxième au site $n = 15$, le troisième au site $n = 22$ et le quatrième au site $n = 29$.

Il est donc évident que le nombre de pics d'un multibreather dépend de la fréquence excitatrice ; plus celle-ci est convenablement élevée, plus le nombre de pics du multibreather est grand.

Sur les figures 3.22, on observe le même phénomène pour $V_d=4V$. Dans ce cas, nous sommes partis d'un breather simple à un pic obtenu en excitant la cellule 24 avec $V_d=4V$ et $f = 244KHz$. En augmentant la fréquence de manière convenable, on passe d'un breather à 1 pic à un breather à 2 pics, puis à un breather à 3 pics.

3.5. Solutions multibreathers

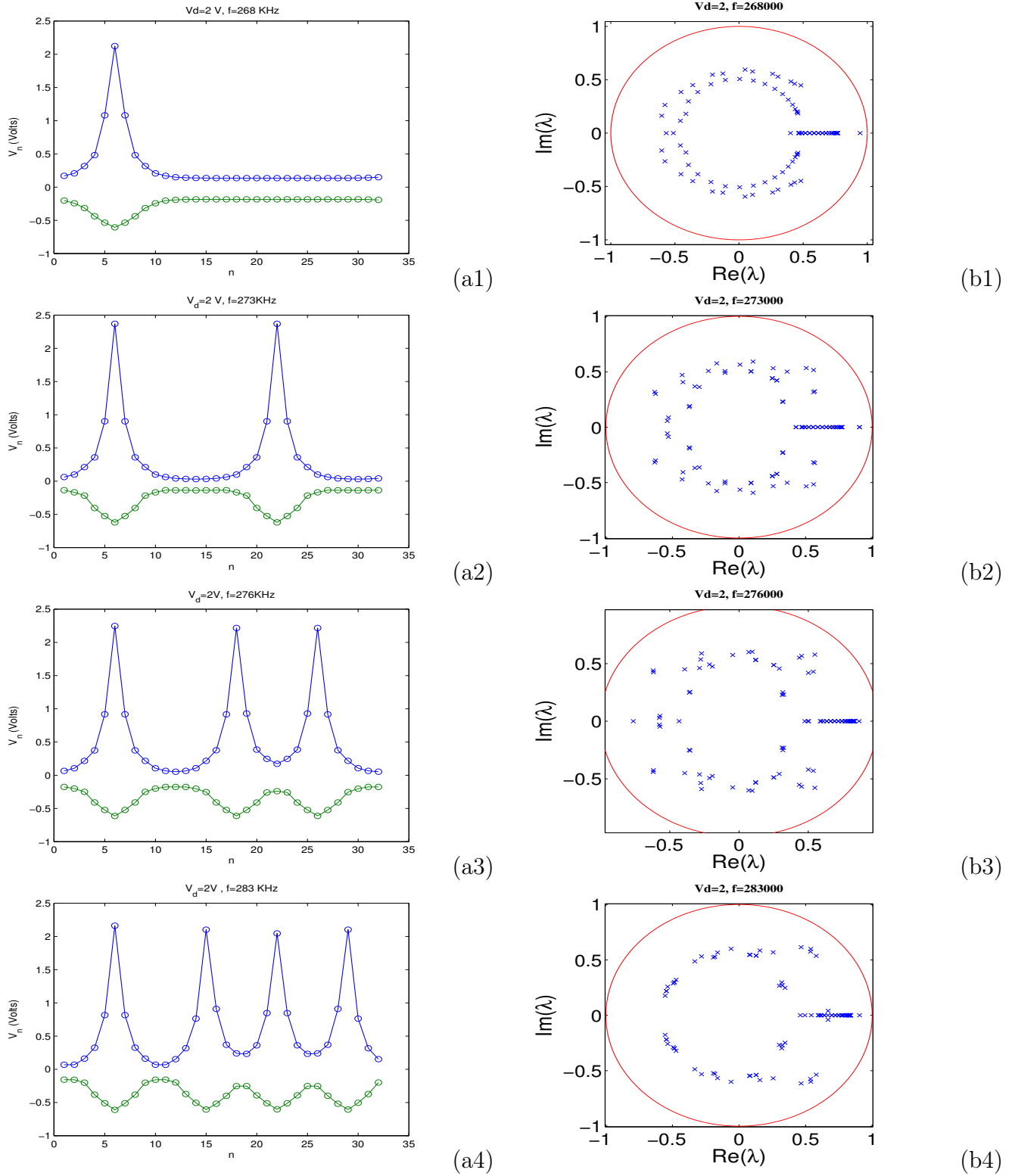


FIGURE 3.21 – Profils des breathers à un, deux, trois et quatre pics pour $V_d=2$ V, et différentes valeurs de la fréquence, et spectres des multiplicateurs de Floquet correspondant

3.5. Solutions multibreathers

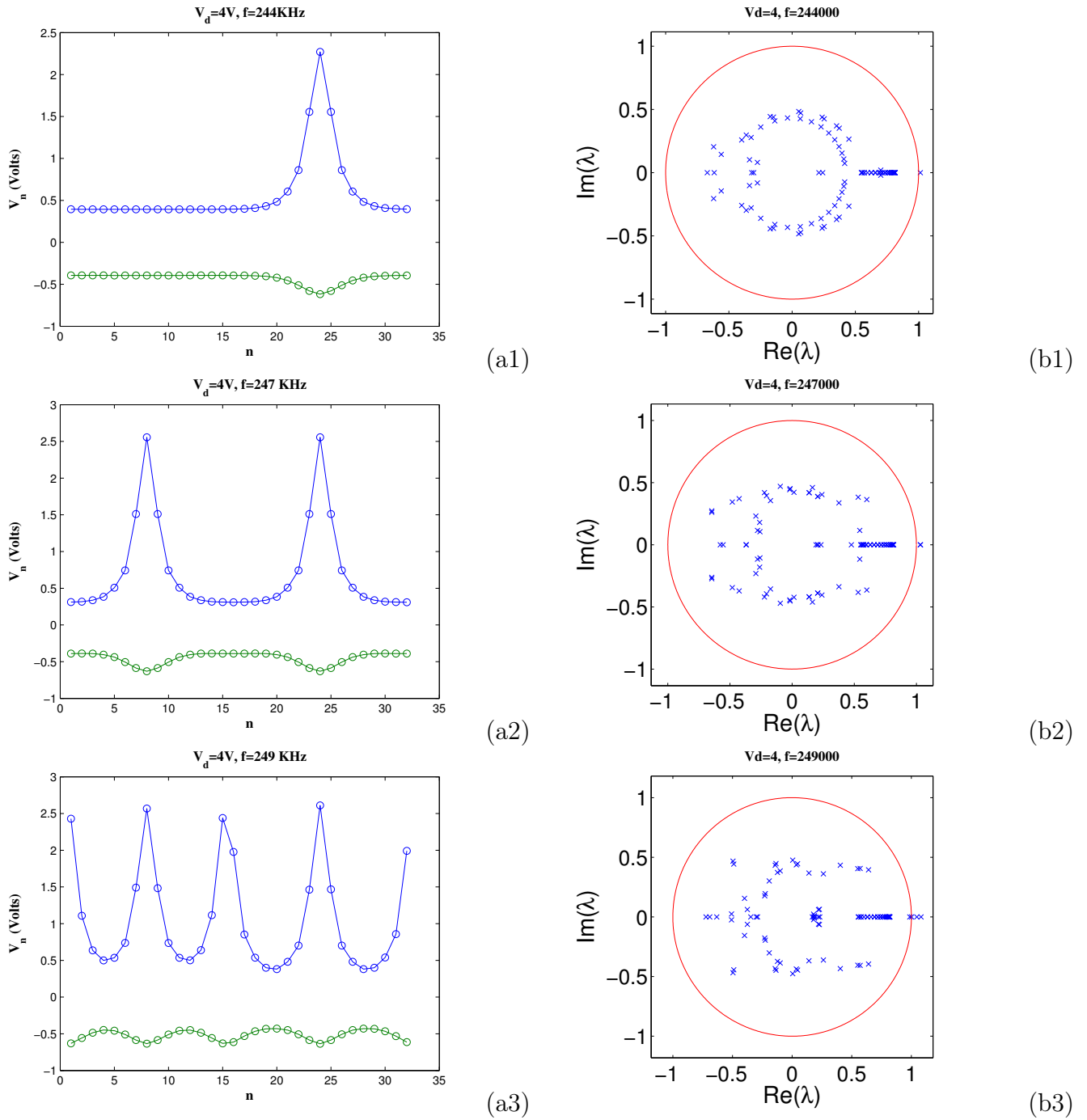


FIGURE 3.22 – Profils des breathers à un, deux et trois pics pour $V_d=4$ V, et différentes valeurs de la fréquence, et spectres des multiplicateurs de Floquet correspondant

3.6 Étude de la sensibilité aux conditions initiales

Afin d'étudier la sensibilité aux conditions initiales des solutions breathers, nous excitons la cellule 4 uniquement, puis la cellule 5 uniquement, et enfin les cellules 4 et 5 simultanément avec $V_d = 3V$ et $f = 300KHz$ dans les trois cas, et nous voyons ce qu'il advient des positions des pics des breathers dans le réseau.

La figure 3.23(a) montre le profil du multibreather obtenu en excitant la cellule 4. Nous voyons qu'il se forme un pic au site 4, et quatre autres aux sites 11, 17, 23 et 29. La figure 3.23(b) montre le profil du multibreather obtenu en excitant la cellule 5. Dans ce cas, il se forme un pic au site 5, et quatre autres aux sites 12, 18, 24 et 30.

Dans le dernier cas (figure 3.23(c)), il se forme un pic sur les sites 4 et 5, et quatre autres aux sites 11, 17, 24 et 30.

On observe le même phénomène sur les figures 3.24. Dans le cas de la figure 3.24(c), on constate que en excitant les cellules 5 et 15, on obtient un multibreather à 3 pics. Un pic apparaît au site 5, un autre au site 15 et un autre au site 26.

Ces observations nous permettent de conclure que le nombre de pics des solutions breathers et multibreathers et leurs positions dépendent sensiblement des conditions initiales.

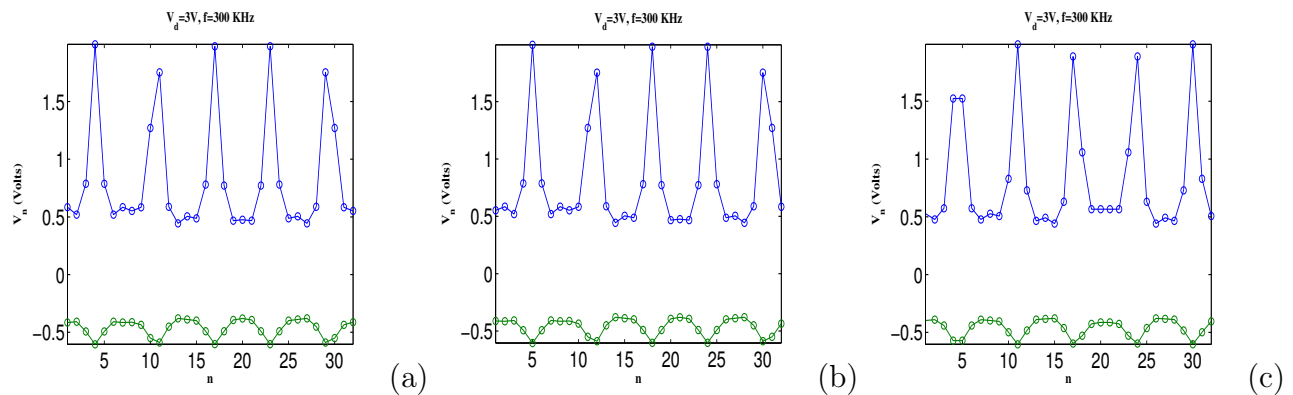


FIGURE 3.23 – Profils de breathers à 5 pics obtenus en excitant la cellule 4 (à gauche), la cellule 5 (au centre) et les cellules 4 et 5 (à droite)

3.7. Observation de l'instabilité modulationnelle

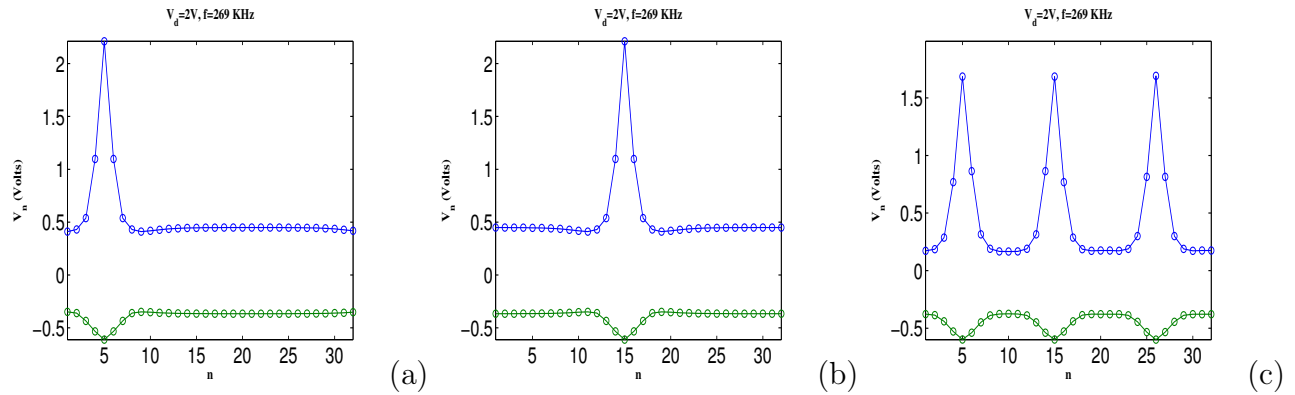


FIGURE 3.24 – Profils de breathers à un pic obtenus en excitant la cellule 5 (à gauche), la cellule 15 (au centre) et à trois pics obtenu en excitant les cellules 5 et 15 (à droite)

3.7 Observation de l'instabilité modulationnelle

Afin d'observer l'instabilité modulationnelle d'une onde plane, phénomène qui peut-être à l'origine de la formation des breathers discrets, nous injectons une onde plane d'amplitude $V_d = 4,5V$ et de fréquence $f = 285KHz$ dans les cellules 16 et 17, et nous observons son comportement pendant sa progression dans la ligne.

Les résultats des simulations numériques sont présentés sur les figures 3.25, 3.26 et 3.27. Sur les figures 3.26 (g) et (h), nous voyons bien que l'onde est plane dans les cellules 16 et 17, car son amplitude est pratiquement constante. À partir de la cellule 15, l'onde devient peu à peu instable, son amplitude commence à s'automoduler, et le phénomène d'instabilité modulationnelle commence à s'installer. Dans les cellules 14 et 13, l'instabilité modulationnelle est effective. Nous voyons bien que l'onde a tendance à se fragmenter en paquet d'ondes isolées. Dans les cellules 8, 10 et 12, l'instabilité modulationnelle est moins importante. Par contre dans les cellules 2, 6, 7 et 9 elle est bien perceptible, et dans les cellules 1, 3, et 4 elle est très accrue.

L'évolution de l'onde dans les cellules 18 à 32 présente une symétrie par rapport aux cellules 16 et 17. C'est-à-dire que l'onde évolue dans les cellules 18 à 32 de la même manière qu'elle évolue dans les cellules 15 à 1 dans cet ordre. Par exemple, nous voyons sur les figures 3.26 (i) et (f) que l'onde de tension évolue de la même façon dans les cellules 18 et 15. L'onde évolue également de la même

3.7. Observation de l'instabilité modulationnelle

façon dans les cellules 32 et 1 (figures 3.27 (h) et 3.25 (a)).

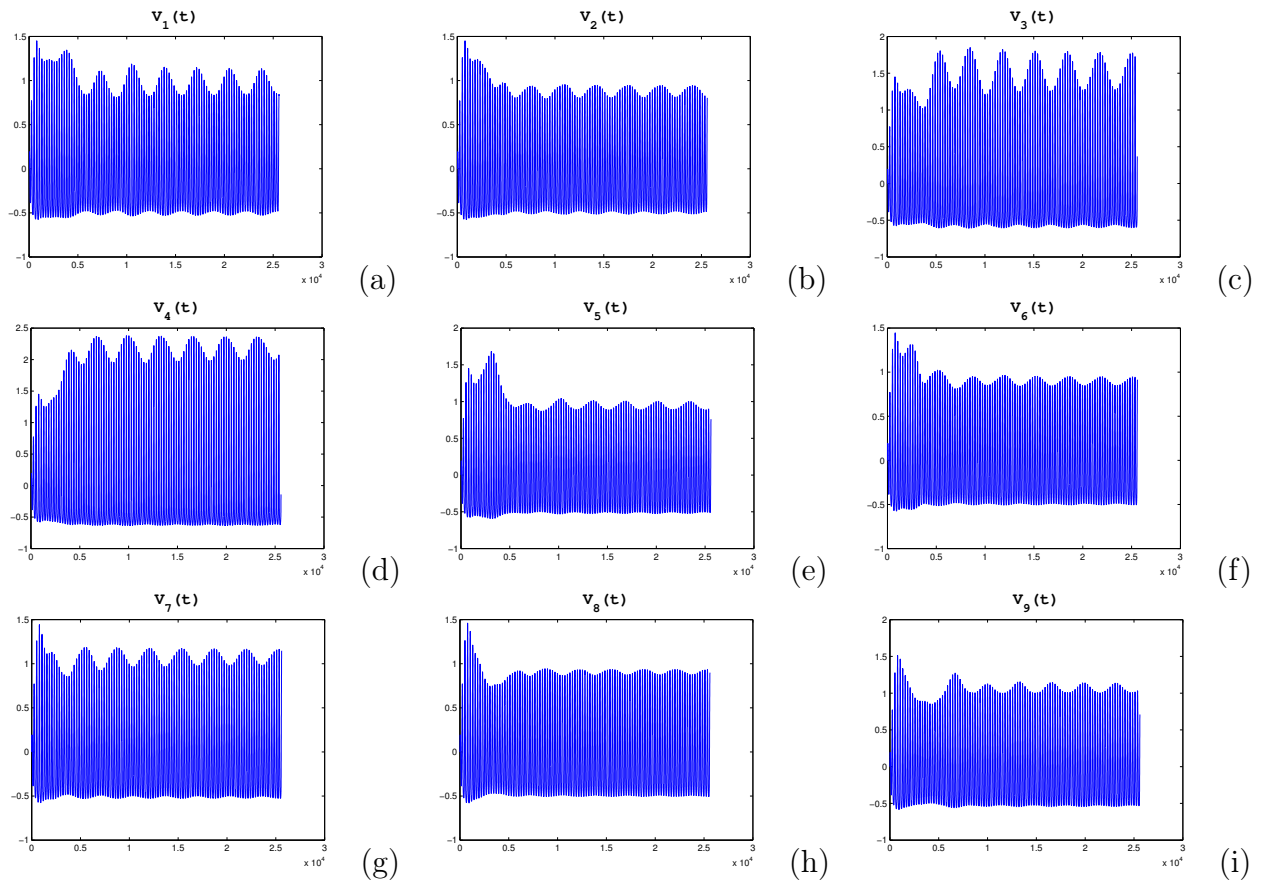


FIGURE 3.25 – Évolution de l'onde plane dans les cellules 1 à 9

3.7. Observation de l'instabilité modulationnelle

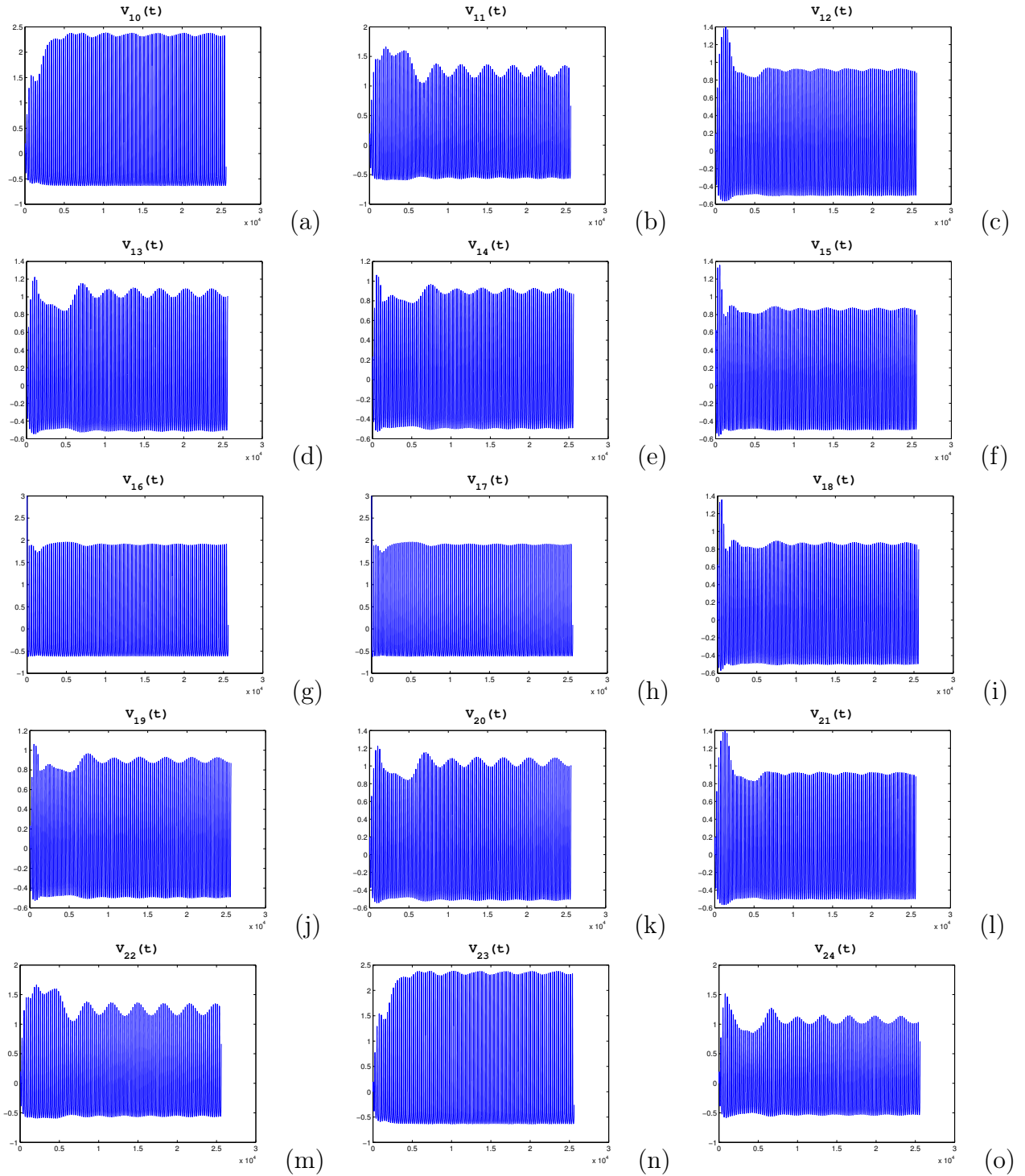


FIGURE 3.26 – Évolution de l'onde plane dans les cellules 10 à 24

3.7. Observation de l'instabilité modulationnelle

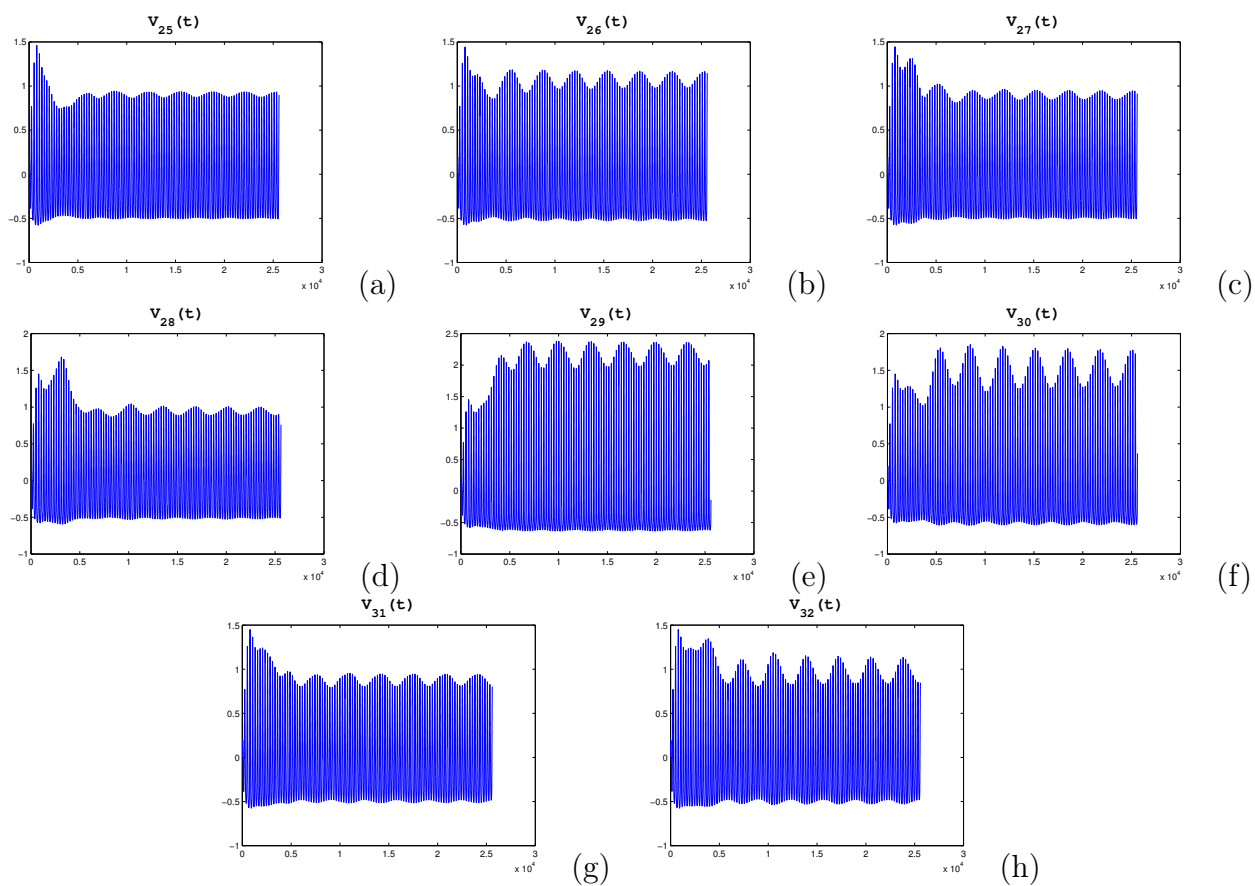


FIGURE 3.27 – Évolution de l'onde plane dans les cellules 25 à 32

3.7. Observation de l'instabilité modulationnelle

Cette instabilité modulationnelle que nous observons dans la ligne conduit à la formation du train de modes localisés que nous voyons sur la figure 3.28. Le spectre de Floquet (figure 3.28 (b)) du train de modes localisés de la figure 3.28 (a) montre qu'il est instable. La figure 3.29 montre l'évolution temporelle du train de modes localisés. Sur cette figure, nous voyons clairement que le train évolue périodiquement dans le temps.

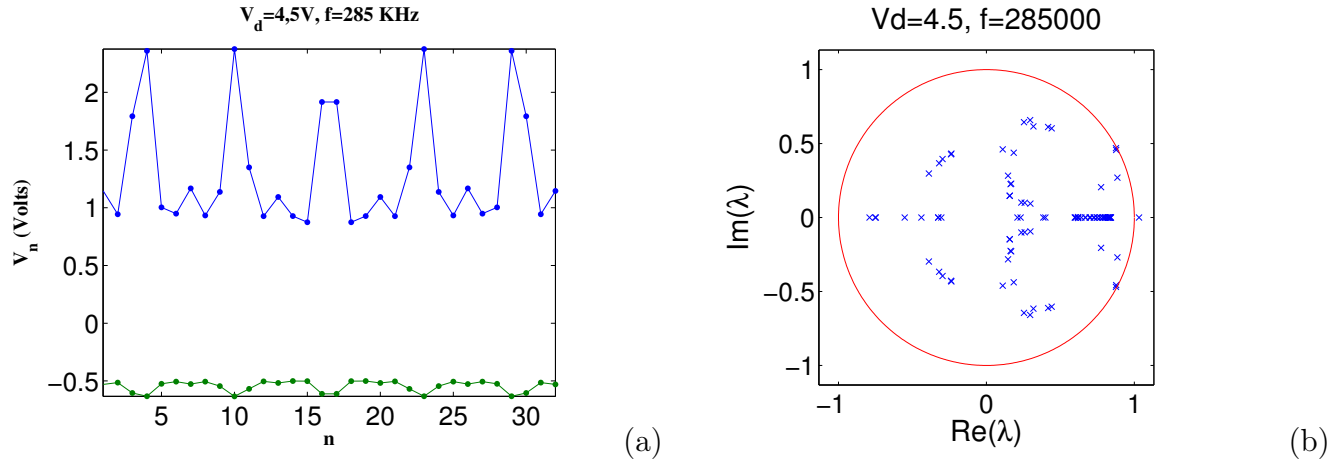


FIGURE 3.28 – Profil spatial du train de modes localisés et spectre de Floquet correspondant.

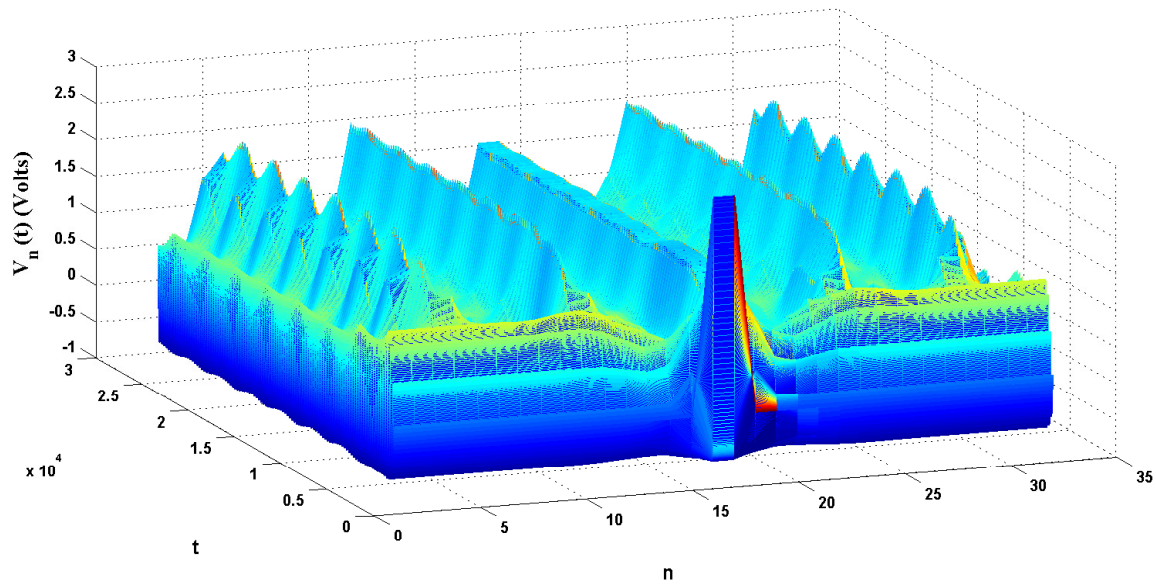


FIGURE 3.29 – Évolution temporelle du train de modes localisés

3.8. Absence de localisation en régime linéaire

La figure 3.30 montre la vue de dessus du profil spatio-temporel du train de modes localisés.

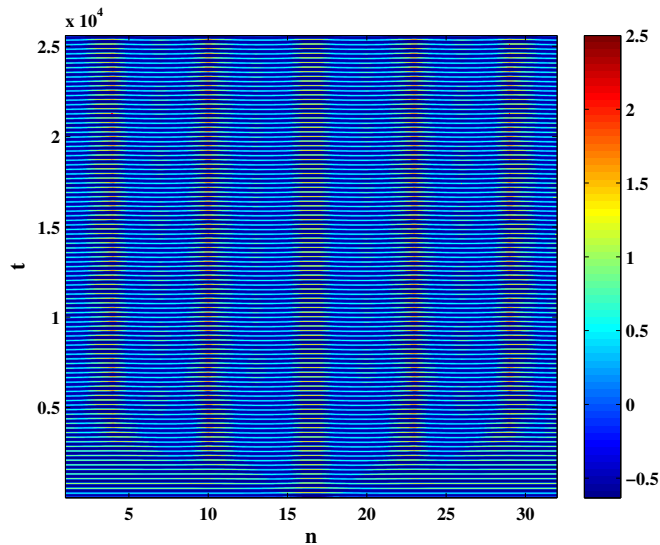


FIGURE 3.30 – *Vue de dessus du profil spatio-temporel du train de modes localisés.*

3.8 Absence de localisation en régime linéaire

Rappelons que le régime linéaire est l'ensemble constitué des petites amplitudes V_d de la tension excitatrice. Il peut-être considéré comme l'intervalle $0 < V_d < 2V$.

Nous voulons montrer ici que c'est la non-linéarité qui est à l'origine de la localisation d'énergie dans le réseau électrique. Puisque les valeurs de V_d que nous avons considéré dans cette étude varient de 1V à 5V, nous choisissons comme valeur de V_d appartenant au régime linéaire, la valeur $V_d=1V$.

Nous excitons la cellule 16 de la ligne avec $V_d = 1V$ et $f = 243,6KHz$. La simulation numérique des équations (1.29) avec ces paramètres nous donne les figures ci-dessous :

La figure 3.31 nous montre qu'il n'y a pas de localisation spatiale pour $V_d=1V$ et $f = 243,6KHz$. Les figures 3.32 et 3.33 peuvent nous permettre en effet de comprendre le pourquoi de cet état de chose. La figure 3.32 nous montre que l'excitation initiale s'amortit exponentiellement en un laps de temps très court. Sur la figure 3.33, nous voyons que l'excitation initiale se disperse (s'étale) avec le temps en répartissant uniformément son énergie dans l'espace. En effet, en régime linéaire, la

3.8. Absence de localisation en régime linéaire

ligne électrique peut-être considérée comme linéaire. Elle est dissipative et dispersive. La diminution très brusque de l'amplitude maximale de l'excitation initiale est due à la dissipation, tandis que l'étalement de l'excitation que l'on observe est due à la nature dispersive de la ligne. Pour que l'énergie de l'excitation reste localisée au cours du temps autour du site $n=16$, il est nécessaire que la non-linéarité soit présente dans la ligne. Donc l'absence de localisation spatiale de l'énergie que nous observons sur la figure 3.31 est due à la non-compensation de la dispersion par la non-linéarité. Par contre, sur les figures 3.7 et 3.11 nous avons observé la localisation d'énergie pour la même valeur de la fréquence, mais pour une valeur de l'amplitude V_d située dans le régime non-linéaire à savoir $V_d=4V$. Dans ce cas, nous étions en présence de la dispersion et la non-linéarité. Nous voyons donc clairement que c'est la non-linéarité qui est à l'origine de la localisation.

La même séquence des faits peut-être observée sur les figures 3.34, 3.35 et 3.36 où nous avons excité les cellules 16 et 17 avec $V_d=1V$ et $f = 285KHz$. Par contre sur les figures 3.28 et 3.29 nous avons observé le phénomène de localisation pour $V_d=4,5V$ et $f = 285KHz$. Ceci prouve une fois de plus que c'est la non-linéarité qui est à l'origine du phénomène de localisation, et par extension que les breathers discrets résultent de la combinaison de la dispersion (ou discrétisation spatiale) et de la non-linéarité.

3.8. Absence de localisation en régime linéaire

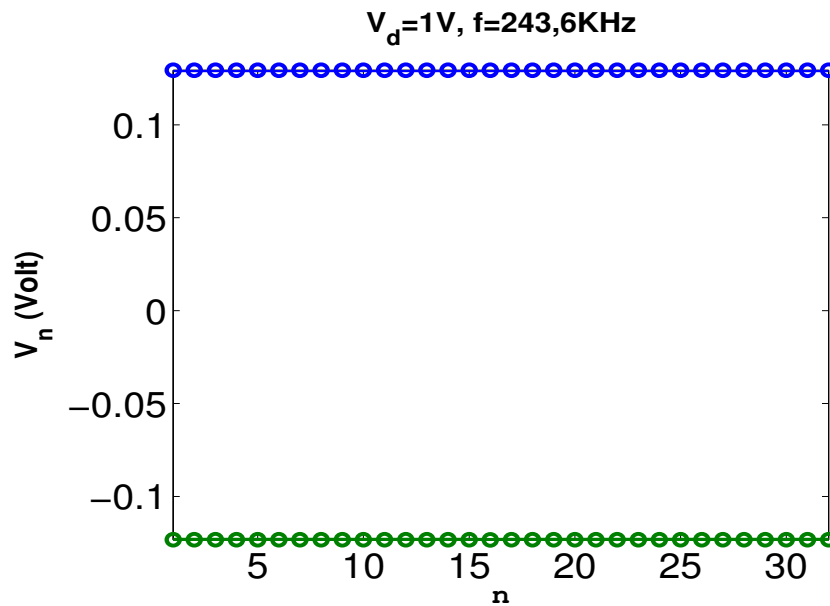


FIGURE 3.31 – Graphe de V_n montrant l'absence de localisation d'énergie en régime linéaire pour $V_d=1V$ et $f = 243,6KHz$.

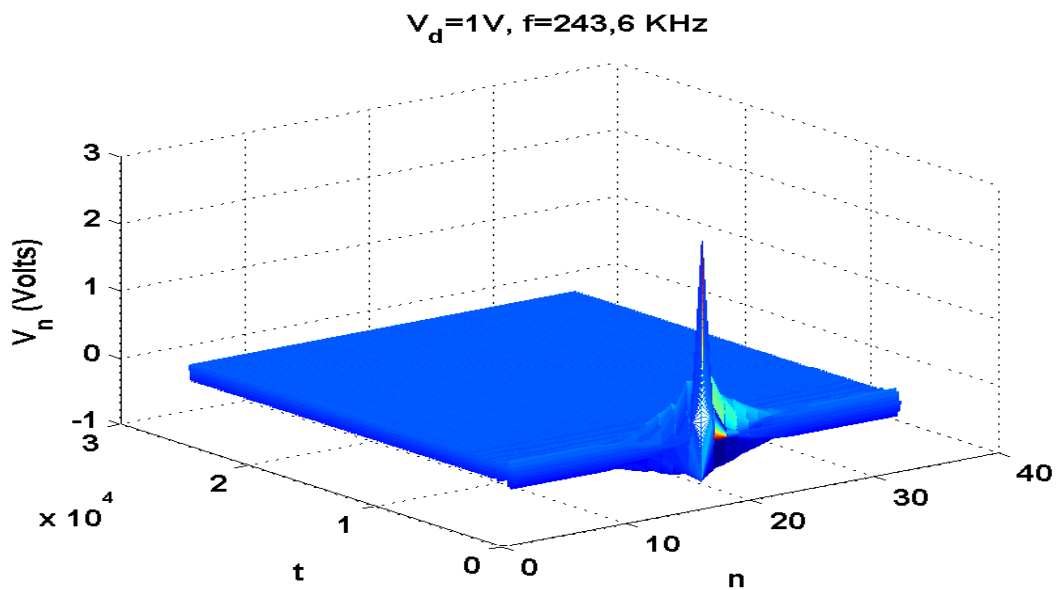


FIGURE 3.32 – Évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1 V$ et $f = 243,6KHz$

3.8. Absence de localisation en régime linéaire

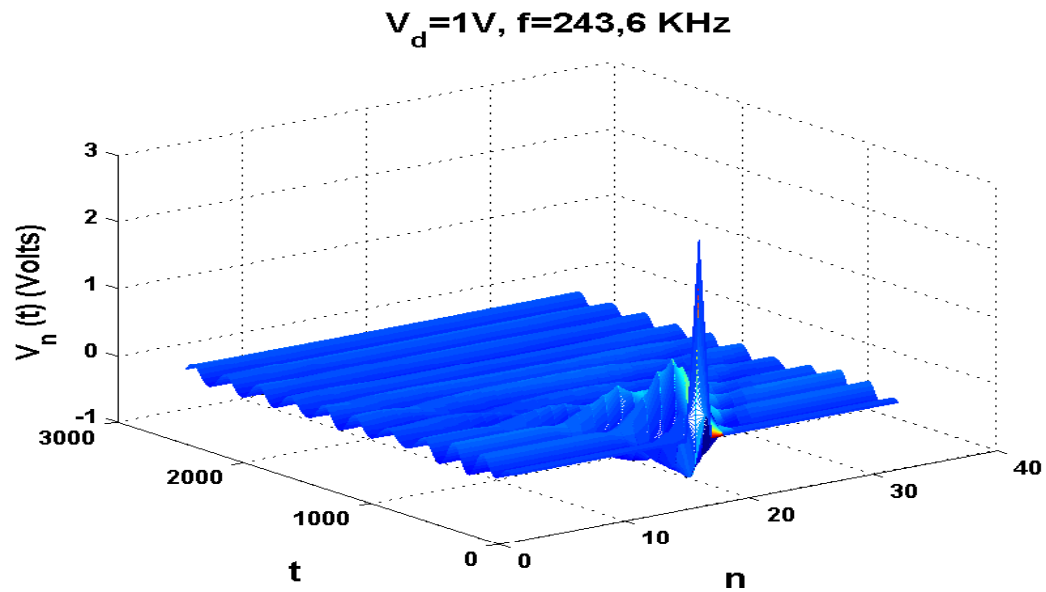


FIGURE 3.33 – Zoom sur les premiers instants de l'évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1\text{ V}$ et $f = 243,6\text{ KHz}$

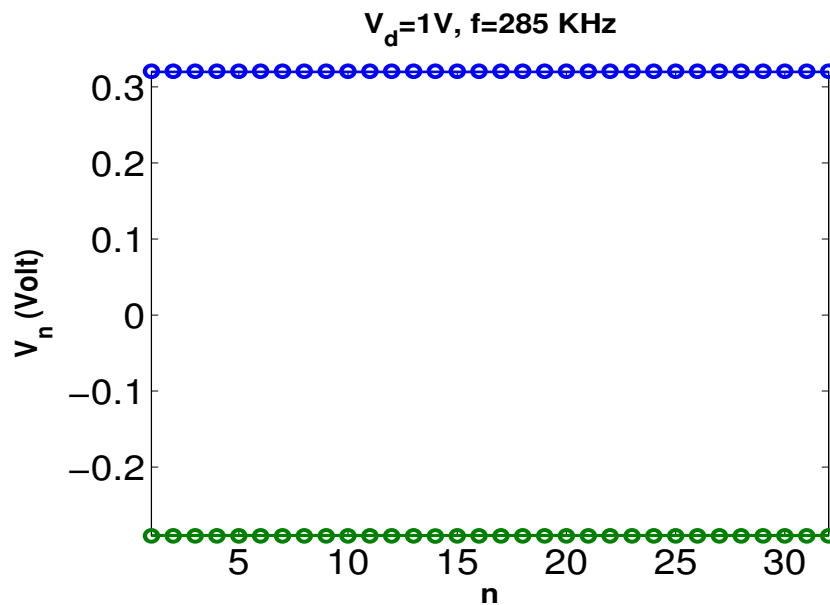


FIGURE 3.34 – Graphe de V_n montrant l'absence de localisation d'énergie en régime linéaire pour $V_d=1V$ et $f = 285\text{ KHz}$.

3.8. Absence de localisation en régime linéaire

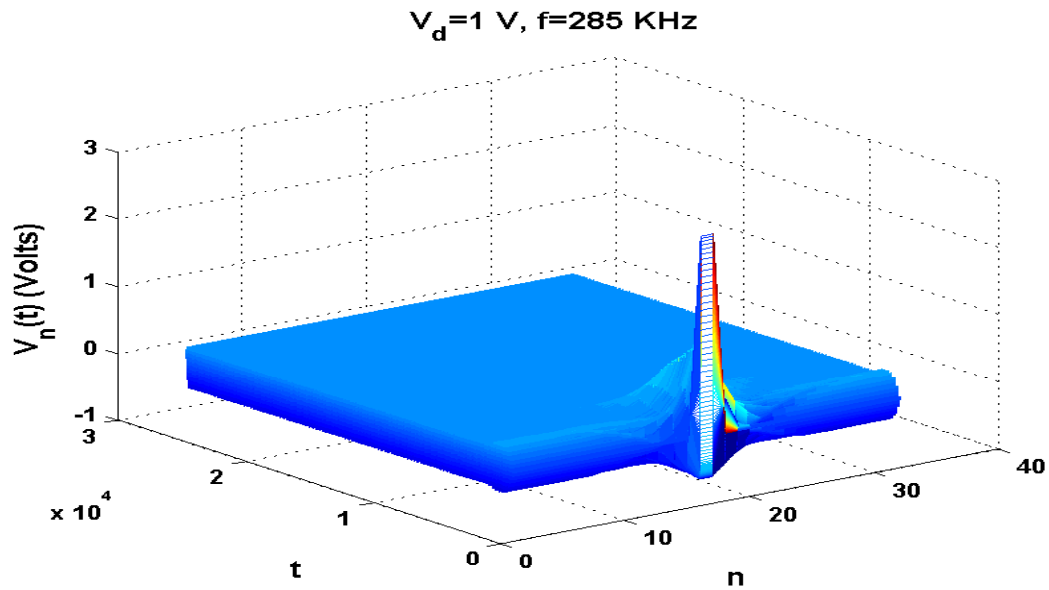


FIGURE 3.35 – Évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1 \text{ V}$ et $f = 285 \text{ KHz}$

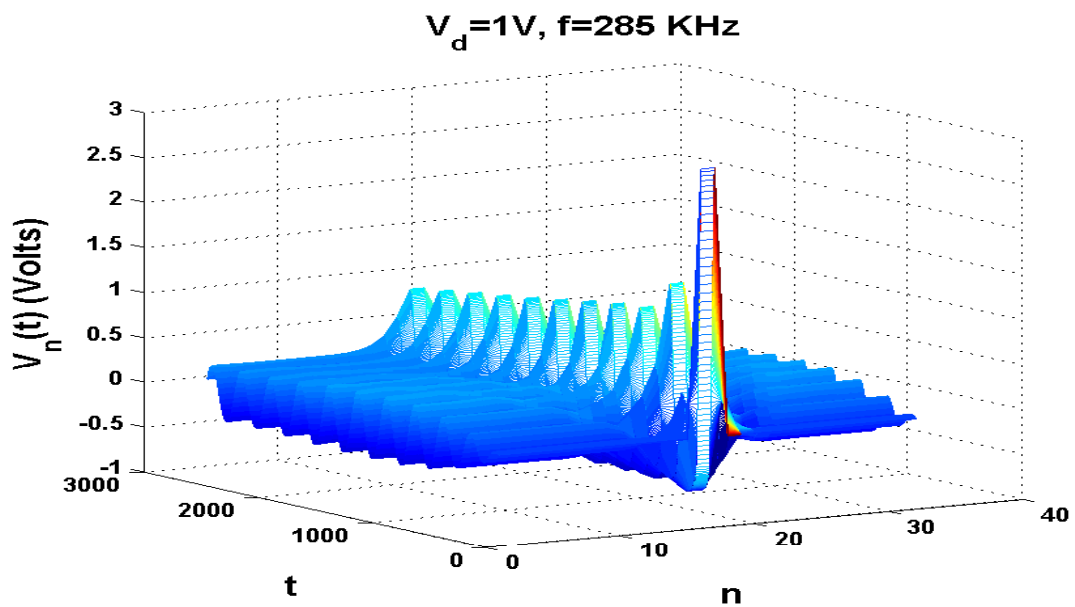


FIGURE 3.36 – Zoom sur les premiers instants de l'évolution temporelle de la réponse spatiale du système à l'excitation initiale pour $V_d=1 \text{ V}$ et $f = 285 \text{ KHz}$

3.9 Conclusion

Les objectifs de ce chapitre étaient de présenter les résultats des simulations numériques des équations de la ligne électrique bi-inductance dans un premier temps, d'étudier la sensibilité aux conditions initiales des solutions breathers, le mécanisme d'instabilité modulationnelle et l'effet de la non-linéarité dans un deuxième temps. Il ressort de cette étude que, le nombre de pics des solutions breathers, leurs positions dans le réseau, de même que la stabilité des solutions en question dépendent sensiblement des conditions initiales. Nous avons vu comment le mécanisme d'instabilité modulationnelle conduit à la formation des breathers discrets et comment la non-linéarité est à l'origine du phénomène de localisation. Nous avons également observé que la fréquence de la tension excitatrice a une influence sur le nombre de pics des solutions breathers. Plus celle-ci est élevée, plus grand est le nombre de pics.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Le travail exposé dans ce mémoire a porté sur l'étude de l'existence et des propriétés de stabilité des breathers discrets dans une ligne de transmission électrique non linéaire périodique constituée d'un couplage inductif de $N = 32$ cellules, ayant une configuration en anneau.

Dans le chapitre 1, nous avons formulé un modèle théorique de ligne électrique non linéaire capable de décrire la formation des modes localisés intrinsèques non linéaires (ou breathers discrets). Pour cela, nous avons étudié en profondeur les caractéristiques de la diode varactor, puisque cet élément est la source de la non-linéarité dans la ligne. En appliquant les lois de Kirchhoff à notre modèle, nous avons abouti à un système de $2N$ équations discrètes non linéaires et couplées décrivant la ligne électrique entière. La recherche des solutions de ce système d'équations dans l'approximation linéaire nous a conduit à la relation de dispersion linéaire des ondes dans le système qui nous a permis de déterminer le domaine d'existence des solutions breathers. Nous avons vu que le domaine d'existence des breathers s'étend sur toute la gamme de fréquences étudiées, mais nous nous sommes limité à l'intervalle de fréquences situé en dessous de la bande phonon. Nous avons montré que l'évolution d'un paquet d'ondes dans la ligne peut être modélisée par l'équation de Ginzburg-Landau Cubique Complexe. À partir de cette équation, nous avons prouvé mathématiquement l'existence des breathers discrets dans notre système.

Au chapitre 2, nous avons exposé la méthode qui nous a permis de construire les solutions breathers, et celle qui nous a permis d'étudier les propriétés de stabilité de ces solutions. Notre méthode

de construction des solutions breathers était basée sur la limite anti-continue dont nous avons expliqué le concept et le principe. Nous avons montré comment étudier la stabilité des solutions breathers au moyen de l'analyse de Floquet, et du calcul de la matrice de monodromie et des multiplicateurs de Floquet. Nous avons vu que seuls les multiplicateurs de Floquet étaient habilités à déterminer les propriétés de stabilité des solutions breathers. Nous avons également présenté les méthodes numériques permettant d'intégrer les équations de la ligne et de calculer la matrice de monodromie et par conséquent les multiplicateurs de Floquet dont elles en découlent.

Le chapitre 3 était consacré à la présentation des résultats des simulations numériques que nous avons mené. Nous avons vu que les solutions breathers sont effectivement des excitations non linéaires localisées dans l'espace et périodiques dans le temps, conformément à leur définition. Nous avons également vu pourquoi les breathers sont aussi appelés oscillations localisées. Nous avons observé que le nombre final de pics et les positions des pics dans le réseau des solutions breathers, de même que leur stabilité sont sensibles aux conditions initiales. Nous avons montré comment le mécanisme d'instabilité modulationnelle conduit à la formation des breathers discrets. Nous avons également montré comment la non-linéarité est à l'origine du phénomène de localisation, et nous avons prouvé que la dispersion et la non-linéarité sont les deux ingrédients nécessaires à l'existence des breathers discrets.

Dans nos travaux futurs, nous nous évertuerons à déterminer les domaines d'existence et de stabilité des breathers à 1,2,3,4,...,n pics, dans l'espace des paramètres (V_d, f) . Nous étudierons la mobilité des breathers dans le même système qui était l'objet de notre étude, et l'impact de leur mobilité dans le transport de l'énergie, de même que les interactions breather-breather. Nous étudierons l'influence de l'introduction d'une impureté sur les breathers dans le réseau. Nous essayerons de mener toutes les études que nous venons de mentionner ci-dessus, dans les réseaux électriques de plus grande dimension.

Bibliographie

- [1] A.A. Maradudin, *Some effects of point defects on the vibrations of crystal lattices*, Rep. Prog. Phys. , 28 :331, (1965)
- [2] P.W. Anderson, *Absence of diffusion in certain random lattices*, Phys. Rev. E, 109 :1492, (1958)
- [3] D.K. Campbell, S. Flach, and Y.S. Kivshar, *Localizing energy through nonlinearity and discreteness*, Physics Today, pages 43-49, (January 2004)
- [4] A. Sievers and S. Taneko, *Intrinsic localized modes in anharmonic crystals*, Phys.Rev.Lett., 61 :970, (1988)
- [5] S. Aubry, Physica D 103, 201 (1997) ; R.S. MacKay, Physica A 288, 174 (2000) ; D.K. Campbell, S. Flach, and Yu.S. Kivshar, Phys. Today 51(1),43 (2004).
- [6] S. Flach and C. R. Willis, Phys. Rep. 295, 181 (1998) ; S. Flach and A. V. Gorbach, *ibid.* 467, 1 (2008)
- [7] Y.S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals*, (Academic, San Diego, CA, 2003).
- [8] E. Trias, J. J. Mazo, and T. P. Orlando, Phys. Rev. Lett. 84, 741 (2000) ; P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach, and Y. Zolotaryuk, *ibid.* 84, 745 (2000).
- [9] G. Theocharis, N. Boechler, P. G. Kevrekidis, S. Job, M. A. Porter, and C. Daraio, Phys. Rev. E 82, 056604 (2010) ; N. Boechler, G. Theocharis, S. Job, P. G. Kevrekidis, M. A. Porter, and C. Daraio, Phys. Rev. Lett. 104, 244302 (2010).
- [10] M. Peyrard, Nonlinearity 17, R1 (2004).

BIBLIOGRAPHIE

- [11] Dauxois T., Peyrard M. and Willis C. R. *Physica D* 57 267–82, (1992).
- [12] Hirota R. and Suzuki K., *J. Phys. Soc. Jpn.* 28 P.1366, (1970)
- [13] Toda M., *J. Phys. Soc. Jpn.* 22 P. 431, (1967).
- [14] Toda M., *J. Phys. Soc. Jpn.* 23 P. 501, (1967).
- [15] Ryan Stearrett and L.Q. English, *Experimental generation of intrinsic localized modes in a discrete electrical transmission line*, JOURNAL OF PHYSICS D : APPLIED PHYSICS, 2007.
- [16] L. Q. English, R. B. Thakur, and R. Stearrett, *Phys. Rev. E* 77, 066601 (2008).
- [17] L. Q. English, F. Palmero, A.J. Sievers, P. G. Kevrekidis, and D. H. Barnak, *Phys. Rev. E* 81, 046605 (2010).
- [18] Ramirez V., " *Les résistances non linéaires à semi-conducteurs*", Collection Dunod, (1981)
- [19] Yagi T. and Noguchi A. ,*Elec. And Commun. Jpn.*59A, p.1, (1976)
- [20] Yagi T. and Noguchi A. ,*Elec. Lett.* 13, p.683, (1977)
- [21] Kofane T. C., Michaux B. and Remoissenet M., *J. Phys. C* 21, p. 1395, (1988)
- [22] Ostrovsky L. A, Papko V. V. and Pelinovskii, *Radiofizika* 15, p. 580, (1972)
- [23] Kuusela T., Hietarinta J, Kokko K. and Laiho R., *J Phys.* 8, p.27, (1987)
- [24] F. Palmero, L. Q. English, J. Cuevas, R. Carretero-González, and P. G. Kevrekidis, *Discrete breathers in a nonlinear electric line : Modeling, computation, and experiment*, PHYSICAL REVIEW E 84, 026605, (2011)
- [25] M. David CHATEAU, *Première approche des solitons.*, (Juin 2010)
- [26] Imran Ashiq Butt, *Discrete Breathers in One- and Two-Dimensional Lattices*, Thesis of Doctor of Philosophy, University of Nottingham, (2006)
- [27] A.A. Ovshinnikov, *Localized long-lived Vibrational states in molecular crystals*, *Sov.Phys.JETP*, 30 :147, (1970)
- [28] A.M. Kosevitch and A.S Kovalev, *Self-localization of vibrations in a one-dimensional anharmonic chain*, *Sov.Phys.JETP*, 67 :1793, (1974)

BIBLIOGRAPHIE

- [29] Campbell D.K. and Peyrard M., *CHAOS-Soviet American Perspectives on Nonlinear Science*, ed. D.K. Campbell (New York : American Institute of Physics), (1990)
- [30] David K. Campbell, *From FPU to Intrinsic Localized Modes : An Odyssey in Nonlinear Science*, (2006)
- [31] Taniuti T., Supp. Prog. Theor. Phys. 55, p.1, (1974)
- [32] Taniuti T. and Wei C.C., J. Phys. Soc. Jpn. 24, p.941, (1968)
- [33] Taniuti T. and Yajima N., J. Math. Phys.10, p.1369, (1969)
- [34] Yoshinaga T. and T. Kakutani T., J.Phys.Soc.Jpn. 53, p.85
- [35] Lange C.G. and Newell A.C., SIAM J. Appl. Math.27, p.441, (1974)
- [36] Fernandez-Diaz J.M., Guinea A. and Palacios S.L., IEEE Phot. Tech. Lett. 14, p.807, (2002)
- [37] Gaetan VAN SIMAEYS, *Instabilité, Solitons et Solhiatons : Une approche expérimentale de la dynamique non linéaire en fibre optique*, Thèse de Doctorat, Université libre de Bruxelles, (2002-2003)
- [38] T.B. Benjamin and J.E. Feir, *The Desintegration of Wave Trains on Deep Water. Part I. Theory.*, Journal of Fluid Mechanics 27, 417-430 (1967)
- [39] Anderson D.R., Datta S. and Gunshor L., J. Appl. Phys. 54, p.5698, (1983)
- [40] François Béceau PELAP, *Dynamique des ondes modulées dans les lignes électriques non linéaires*, Thèse de Doctorat d'État ès-Sciences, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, (2004)
- [41] Ostrovskiy L.A., Zh, Eksp. Teor. Fiz. 51, p.1189, (1966)
- [42] Bespalov V.I. and Tanalov V.I., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 3, p.471, (1966)
- [43] Hasegawa A. and Tappert F.D., Appl. Phys. Lett. 23, p.142, (1973)
- [44] Seve E., Tchofo D.P., Millot G., Remoissenet M., Bilbaut J.M. and Haelterman, Phys. Rev. A 54, p.3519, (1996)
- [45] Taniuti T. and Washimi H., Phys. Rev. Lett. 21, p.209, (1968)

BIBLIOGRAPHIE

- [46] Hasegawa A., Phys. Rev. Lett. 24, p.1165, (1970)
- [47] Hasegawa A., Phys. Fluid 15, p.870, (1972)
- [48] Newell A.C., Lect. Appl. Math. 15, p.870, (1972)
- [49] Marquie P., Bilbault J.M. and Remoissenet M., Phys. Rev. E 51, p.6127, (1995)
- [50] Pelap F.B., Kofane T.C., Flytzanis N. and Remoissenet M., J. Phys.Soc. Jpn. 70, p.2568, (2001)
- [51] Ketchakeu J., Kofane T.C. and Zibi A., Physica Scripta 44, p.505, (1991)
- [52] Kivshar Y.S. Peyrard M., Phys. Rev. A 46, p.3198, (1992)
- [53] Simo E. and Kofane T.C., Physica Scripta 49, p.543 (1992)
- [54] Segur H. and Kruskal M.D. (1987), Phys. Rev. Lett. 58 747-50, Kitchenassamy S. (1991), Commun. Pure Appl. Math. 44 789-818, Denzler J. (1993), Commun. Math. Phys. 158 397-430
- [55] MacKay R.S. and Aubry S., Nonlinearity 7 1623-43, (1994)
- [56] S. Aubry and G. Abramovici, *Chaotic trajectories in the standard map : the concept of anti-integrability*, Physica D, 43 :199, (1990)
- [57] Sepulchre J-A and MacKay R.S., *Localized oscillations in conservative or dissipative networks of weakly coupled autonomous oscillators*, Nonlinearity 10, pp 679-713 (1991)
- [58] L.Q. English, F. Palmero, P. Candiani, J. Cuevas, R. Carretero-González, P.G. Kevrekidis, and A.J. Sievers , *Generation of Localized Modes in an Electrical Lattice Using Subharmonic Driving*, Phys. Rev. Lett., PRL 108, 084101, (2012)
- [59] J.L. Marin and S. Aubry, *Breathers in nonlinear lattices : numerical calculation from the anti-continuous limit*, Nonlinearity 9, 1501-1528, (1996)
- [60] Kofane T.C., *U.E. PHY 547 : Systèmes dynamiques et Chaos*, Université de Yaoundé I, Laboratoire de Mécanique, (2011)
- [61] P.J. Martínez, M. Meister, L.M. Floría and F. Falo *Dissipative discrete breathers : Periodic, quasiperiodic, chaotic and mobile*, CHAOS, VOLUME 13, NUMBER 2, (JUNE 2003)